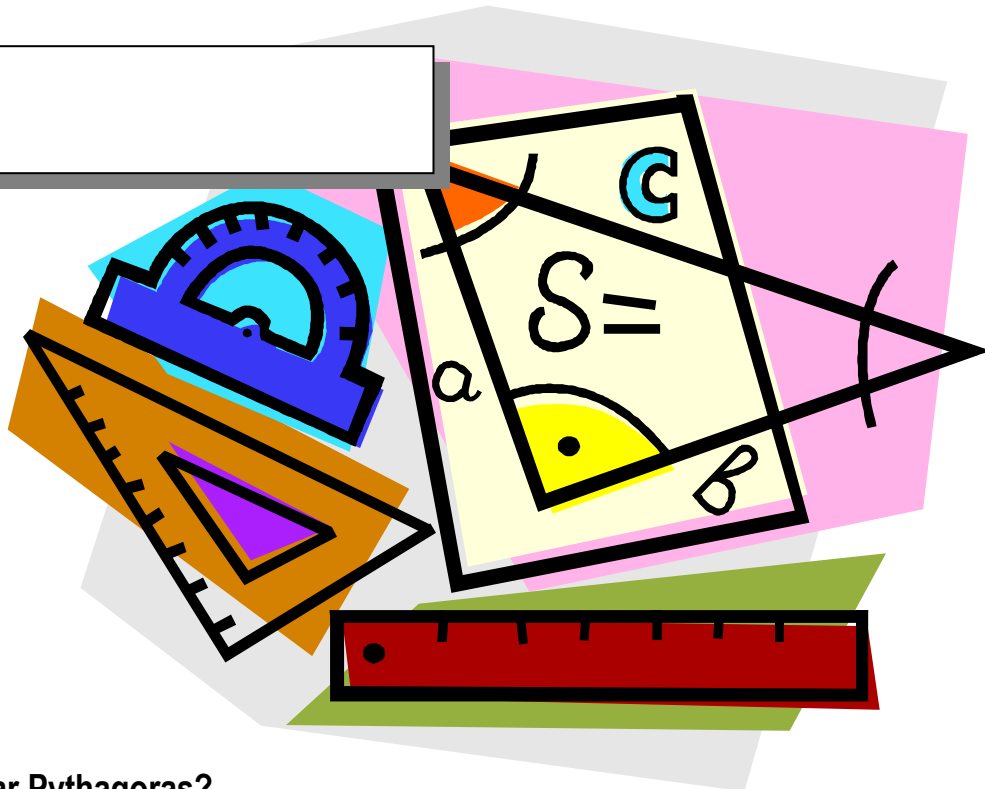


Geometrie-Dossier

Der Satz des Pythagoras

Name:




Inhalt:

- Wer war Pythagoras?
- Der Satz des Pythagoras mit Beweisen
- Anwendung des Satz von Pythagoras in der Ebene
- Anwendung des Satz von Pythagoras im Raum
- Konstruktion von Strecken und Flächen in wahrer Grösse und Gestalt

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  gekennzeichnet

schwierigere Aufgaben sind mit einem  gekennzeichnet.

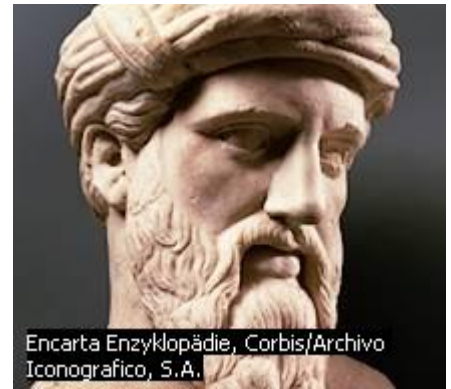
Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Beachten: Konstruktionen: Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)
Skizzen: Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.
Sichtbarkeit: In Raumbildern alle nicht sichtbare Kanten gestrichelt darstellen.

1. Wer war Pythagoras – Eine kurze Biographie

Pythagoras ist uns heute als „Teil“ der geometrischen Berechnung in Dreiecken ein Begriff. Damit beschäftigen wir uns ja im Moment auch in den Geometrie-Stunden. Doch Pythagoras war für viele Bereiche eine ganz wichtige Persönlichkeit, deren Einfluss und Ansehen zahlreiche Wissenschaftszweige beeinflusste und sogar förderte. Dazu ein (leicht gekürzter) Artikel aus „Microsoft Encarta“:



Encarta Enzyklopädie, Corbis/Archivo Iconografico, S.A.

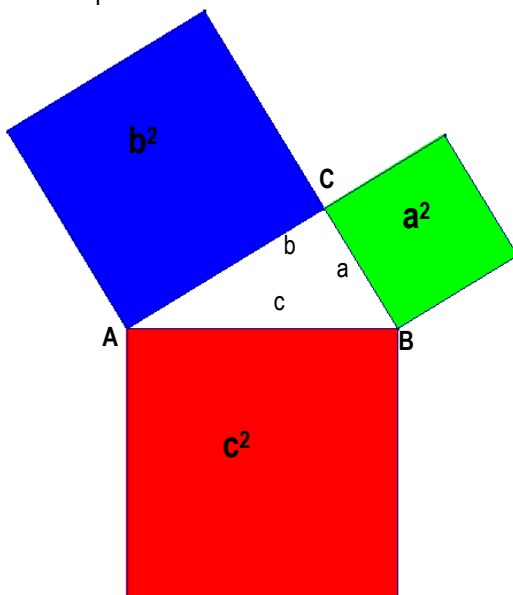
„Pythagoras wurde in Samos (Griechenland) geboren. Vermutlich studierte er die Lehren der vorsokratischen Philosophen Thales, Anaximander, Pherekydes und Anaximenes. Danach unternahm er Reisen durch Ägypten und Babylonien. Angeblich soll seine Abneigung gegen den Tyrannen Polykrates den Philosophen 532 bzw. 531 v. Chr. aus Samos vertrieben haben. Um 530 v. Chr.

ließ er sich in Kroton nieder, einer griechischen Kolonie im Süden Italiens. Hier gründete er die Schule der Pythagoreer, einen Kreis mit sittlich-religiösem, politischem und wissenschaftlichem Impuls. Er starb um 500 v. Chr. vermutlich in Metapont. Die Philosophie des Pythagoras existiert allein in den Nachschriften seiner Schüler, die ihn als absoluten Weisen verehrten. Vermutlich gehen auch viele ihrer Gedanken auf ihn zurück. Die Pythagoreer beschreiben den nach ihnen bzw. den nach ihrem Lehrer, Pythagoras von Samos, benannten Lehrsatz. Ihre Erkenntnis war allerdings verschiedenen Quellen zufolge schon den Babyloniern – 1 000 Jahre vor Pythagoras – bekannt.

Ausgehend von Pythagoras glaubten die Pythagoreer an eine Reihe von Mysterien. So gingen sie von der Unsterblichkeit und Wiedergeburt der menschlichen Seele aus – ein Gedanke, der später etwa von Platon wieder aufgegriffen wurde. Darüber hinaus beschäftigte sich der Kreis der Pythagoreer verstärkt mit mathematischen Fragen. So unterstrichen sie etwa die mathematische Ordnung der (göttlich geschaffenen) Welt. Für ihre Zahlentheorie wurde das Verhältnis der geraden zu den ungeraden Werten sowie die Bedeutung von Quadrat- und Primzahlen zentral. Von diesem arithmetischen Standpunkt aus entwickelten sie ein Zahlenmodell, das sie als letztes Prinzip der Proportionen, der Ordnung und der Harmonie des Universums ansahen. Durch ihre Studien schufen sie die Basis der Mathematik. In der Astronomie waren die Pythagoreer die Ersten, die die Erde als Kugel betrachteten und die harmonische Ordnung der Himmelskörper mit Hilfe ihrer Zahlenlehre zu erklären suchten. Überdies meinten sie, die Planeten und Sterne seien durch Intervalle voneinander getrennt, die den harmonischen Klängen von Saiten entsprächen. Die Bewegung der Planeten erzeuge dann die so genannte Sphärenmusik.“

2. Der Satz des Pythagoras mit Beweisen

Zuerst einmal, um alles andere vorweg zu nehmen, möchte ich den „berühmten“ Satz des Pythagoras an den Anfang dieses Kapitels stellen:



In rechtwinkligen Dreiecken ist der Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.

Wie in der Zeichnung ersichtlich ist das Dreieck angeschrieben und zwar so, dass c die Hypotenuse, a und b die Katheten sind. Entsprechend bedeutet der Satz von Pythagoras in unserem Beispiel, dass

a^2	+	b^2	=	c^2
Quadrat über der Kathete a		Quadrat über der Kathete b		Quadrat über der Hypotenuse c

Zur Erinnerung:

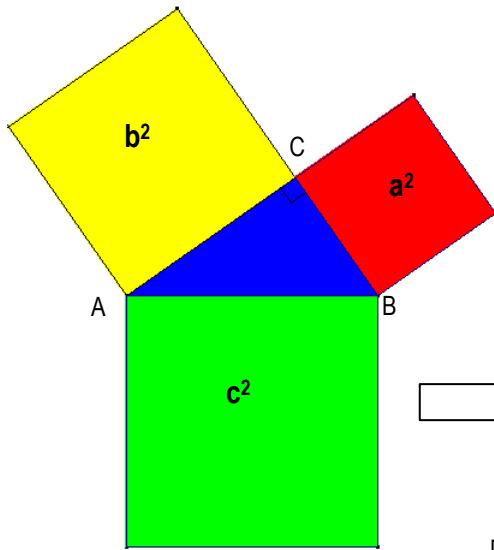
Hypotenuse: Ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende (längste) Seite eines rechtwinkligen Dreiecks.

Kathete(n): Sind die beiden dem rechten Winkel anliegenden (kürzeren) Seiten im rechtwinkligen Dreieck.

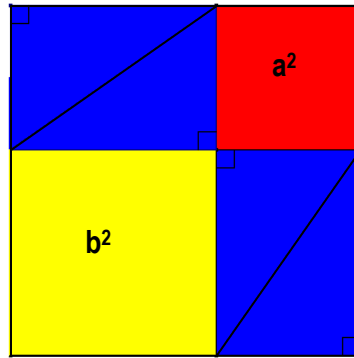
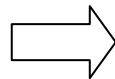
Nun möchte ich diesen Satz etwas weiter ausführen und vor allem zwei Beweise dazu liefern.

a) Ein erster Beweis für den Satz von Pythagoras:

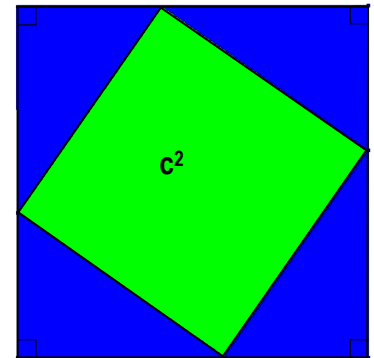
Der erste Beweis für den Satz von Pythagoras verläuft über eine geometrische Flächenbelegung. Ausgehen wollen wir von der „normalen“ Pythagoras – Figur mit einem rechtwinkligen Dreieck und den entsprechenden Quadraten über den Katheten und über der Hypotenuse.



Auf die folgende Weise zeigen wir jetzt, dass wir aus den beiden Kathetenquadraten, sowie dem Hypethusenquadrat jeweils gleich grosse Figuren legen können. Dies sieht dann so aus:



Dieses Quadrat besteht aus vier gleichen rechtwinkligen Dreiecken und den beiden Kathetenquadraten.



Dieses Quadrat besteht aus vier gleichen rechtwinkligen Dreiecken und dem Hypotenusenquadrat .

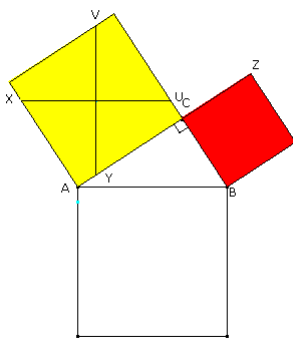
Da sich also gleiche Flächen einerseits aus vier blauen Dreiecken und den Kathetenquadraten, sowie vier gleichen blauen Dreiecken und dem Hypotenusenquadrat legen lassen, **bedeutet das, dass das grüne Hypotenusenquadrat und die beiden Kathetenquadraten (rot und gelb) gleiche Flächen belegen.**

Darum also muss also auch hier gelten: $a^2 + b^2 = c^2$ (q.e.d.)

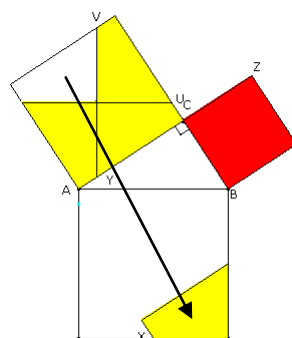
(q.e.d. bedeutet: „Quod Erat Demonstrandum“, was lateinisch ist und bedeutet: „Was zu beweisen war“).

b) Ein zweiter Beweis für den Satz von Pythagoras:

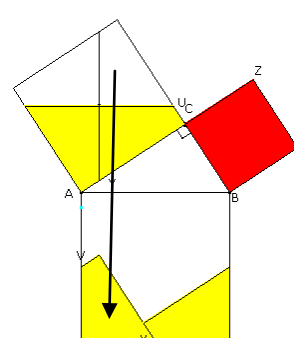
Der zweite Beweis für den Satz von Pythagoras verläuft ebenfalls über eine geometrische Flächenbelegung. In diesem Fall aber zeigen wir, dass wir die rote und die gelbe Fläche (also a^2 und b^2) direkt in die grüne Fläche (c^2) überführen können.



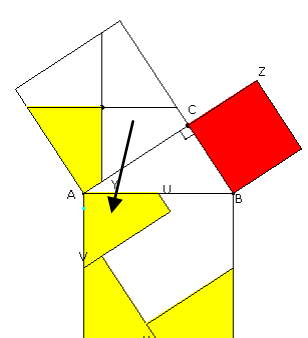
Ausgangslage



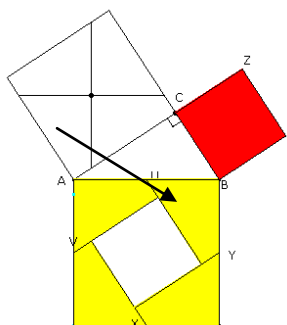
1. Flächenverschiebung



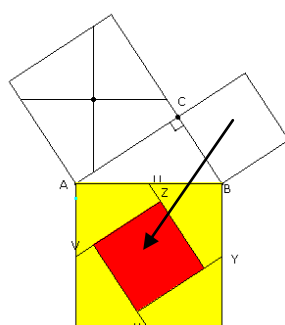
2. Flächenverschiebung



3. Flächenverschiebung



4. Flächenverschiebung



5. Flächenverschiebung

Wir können also den **Flächeninhalt von den beiden Kathetenquadraten a^2 und b^2 vollständig in die Fläche des Hypotenusenquadrates überführen.**

Es gilt also (einmal mehr): $a^2 + b^2 = c^2$ (q.e.d.)

3. Berechnungen mit dem Satz von Pythagoras in der Ebene

Der Satz von Pythagoras gilt also in rechtwinkligen Dreiecken. Das bedeutet, dass wir *in jedem rechtwinkligen Dreieck aus zwei bekannten Seitenlängen die dritte Seitenlänge berechnen können*.

a) Formeln:

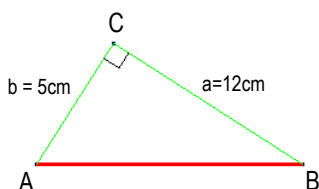
Die Formeln sind sinnvollerweise mit den Namen Hypotenuse und Kathete zu lernen, denn dann ist man unabhängig davon, wie ein Dreieck angeschrieben ist. Daneben stehen die „normalen“ Formeln mit a , b , c , wobei c in diesem Fall die Hypotenuse darstellt.

$$\text{Hypotenuse}^2 = (\text{kurze Kathete})^2 + (\text{lange Kathete})^2 \quad (\text{Grundformel, } c^2 = a^2 + b^2)$$

$$(\text{kurze Kathete})^2 = \text{Hypotenuse}^2 - (\text{lange Kathete})^2 \quad (\text{abgel. Formel, } b^2 = c^2 - a^2)$$

$$(\text{lange Kathete})^2 = \text{Hypotenuse}^2 - (\text{kurze Kathete})^2 \quad (\text{abgel. Formel, } a^2 = c^2 - b^2)$$

1. Berechnung der Hypotenuse (hier c):



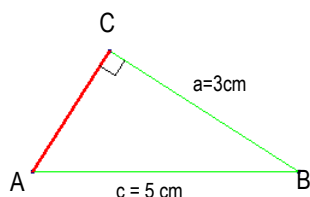
Gegeben: Katheten a und b

Gesucht: Hypotenuse c ($\text{Hypotenuse}^2 = (\text{kurze Kathete})^2 + (\text{lange Kathete})^2$)

Formel: $c^2 = a^2 + b^2$ also $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Berechnung: $c = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = \underline{13 \text{ cm}}$

2. Berechnung der kurzen Kathete (hier b):



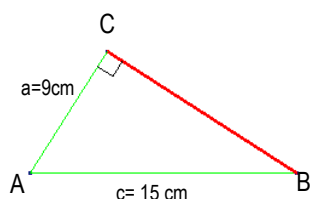
Gegeben: Kathete a und Hypotenuse c

Gesucht: Kathete b ($(\text{kurze Kathete})^2 = \text{Hypotenuse}^2 - (\text{lange Kathete})^2$)

Formel: $b^2 = c^2 - a^2$ also $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Berechnung: $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = \underline{4 \text{ cm}}$

3. Berechnung der langen Kathete (hier a):



Gegeben: Kathete b und Hypotenuse c

Gesucht: Kathete a ($(\text{lange Kathete})^2 = \text{Hypotenuse}^2 - (\text{kurze Kathete})^2$)

Formel: $a^2 = c^2 - b^2$ also $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Berechnung: $a = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = \underline{12 \text{ cm}}$

b) Zahlentrippele:

In all diesen Beispielen ist die Rechnung ganzzahlig aufgegangen. **Natürlich gibt es unzählige Beispiele, wo das Ergebnis ein Zahl mit zahlreichen Kommastellen ergibt. Vielfach lässt man es dann auch als Wurzelterm stehen.**

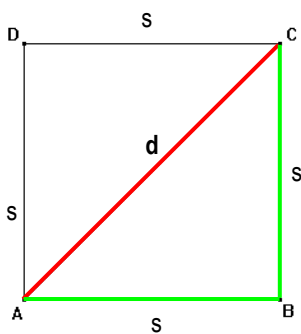
Wenn – wie in unseren Beispielen – die Summe aus zwei Quadraten von zwei ganzen Zahlen gerade wieder ein Quadrat einer ganzzahligen Zahl ergibt, spricht man von „pythagoräischen Zahlentrippele“. Natürlich gelten auch alle Vielfachen der Trippel wiederum als Trippel (3 – 4 – 5 und 6 – 8 – 10 und 9 – 12 – 15 usw.)

Einige Zahlentrippele: (davon gibt es wie gesagt Tausende, darum nur einige wenige Beispiele):

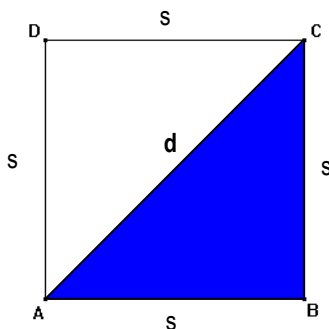
3	4	5	5	12	13	8	15	17	7	24	25
20	21	29	9	40	41	12	35	37	11	60	61

c) Anwendungen des Satz von Pythagoras in der Ebene:

1. Die Diagonale im Quadrat



Pythagoras heisst: Suche nach rechtwinkligen Dreiecken (hier sind sie farblich hervorgehoben)



Wir stellen fest, dass es sich bei einem Quadrat um zwei zusammengesetzte rechtwinklige Dreiecke handelt. Das Stichwort „rechtwinkliges Dreieck“ muss in unserem Kopf sofort den Link zum Satz von Pythagoras erzeugen.

Im rechtwinkligen Dreieck ABC bildet die Quadrat-Diagonale d gerade die Hypotenuse. Somit gilt:

$$\text{Hypotenuse}^2 = (\text{kurze Kathete})^2 + (\text{lange Kathete})^2$$

übersetzt mit den entsprechenden Seitenbeschriftungen heisst dies hier:

$$d^2 = s^2 + s^2 \text{ also}$$

$$d = \sqrt{s^2 + s^2} = \sqrt{2s^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{s^2} = \sqrt{2} \cdot s = s\sqrt{2}$$

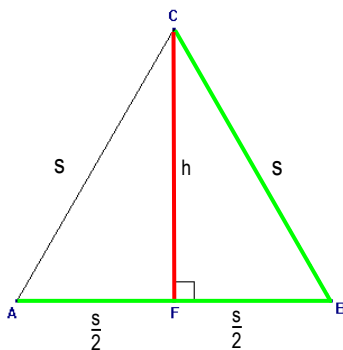
Es gilt also: Die Diagonale im Quadrat ist gerade $\sqrt{2}$ mal länger als die Quadratseite.

$$d = s\sqrt{2}$$

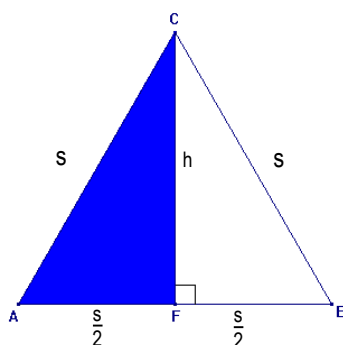
und entsprechend

$$s = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

2. Die Höhe im gleichseitigen Dreieck



Pythagoras heisst: Suche nach rechtwinkligen Dreiecken (hier sind sie farblich hervorgehoben)



Wir stellen fest, dass bei einem gleichseitigen Dreieck die Höhe gerade durch den Mittelpunkt der Basis geht. Somit teilt die Höhe das Dreieck in zwei gleiche, rechtwinklige Dreiecke, deren kurze Kathete gerade die Hälfte der Hypotenuse ausmacht. Die Höhe h bildet in diesem rechtwinkligen Dreieck die längere Kathete. Somit gilt:

$$(\text{lange Kathete})^2 = \text{Hypotenuse}^2 - (\text{kurze Kathete})^2$$

übersetzt mit den entsprechenden Seitenbeschriftungen heisst dies hier:

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 \text{ also}$$

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{4s^2}{4} - \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{\sqrt{3s^2}}{\sqrt{4}}$$

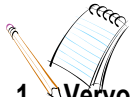
$$= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{s^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3} \cdot s}{2} = \frac{s\sqrt{3}}{2}$$

Es gilt also: Die Höhe im gleichseitigen Dreieck ist gerade $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mal länger als die Dreiecksseite.

$$h = \frac{s\sqrt{3}}{2}$$

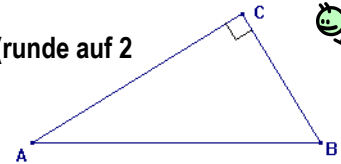
und entsprechend

$$s = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$



Berechnungen mit Pythagoras in der Ebene:

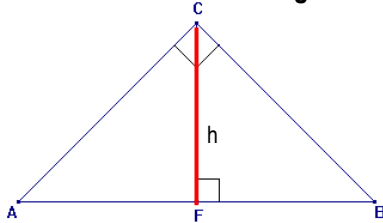
1. Vervollständige die untenstehende Tabelle für das rechtwinklige Dreieck ABC (runde auf 2 Stellen nach dem Komma oder lasse Wurzelterme stehen)



	a=	b=	c=
a)	15 cm	6 cm	
b)	148 cm		821 cm
c)		15 cm	19.5 cm
d)	16 cm	2.25 cm	

	a=	b=	c=
e)	13 cm	2 cm	
f)	23 cm	15.5 cm	
g)		13.58 cm	15.16 cm
h)	19.5 cm		59 cm

2. Berechne die Höhe h im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC.



AB = 16 cm BC = 11.31 cm

.....

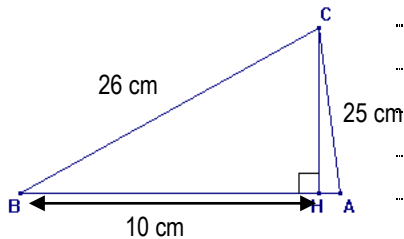
.....

.....

.....

.....

3. Berechne den Umfang und die Fläche des gegebenen Dreiecks.



.....

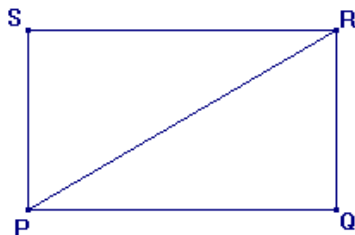
.....

.....

.....

.....

4. Berechne im Rechteck PQRS die fehlende Größe:



	PQ	QR	PR
a)	12	21	
b)		56	91
c)	1.25		9.55
d)	6x	8x	

5. Berechne im gleichschenkligen Dreieck die Basishöhe, wenn ein Schenkel 28 cm und die Basis 48 cm misst..



Skizze:

.....

.....

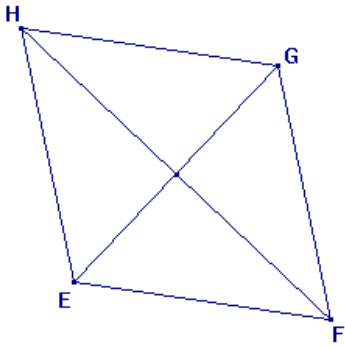
.....

.....

.....

.....

7. Im Rhombus EFGH kennst du die Länge der Seite ($s = 22\text{cm}$) und die Länge der Diagonale EG ($EG = 32\text{cm}$). Berechne die Länge der Diagonale FH sowie den Flächeninhalt des Rhombus.

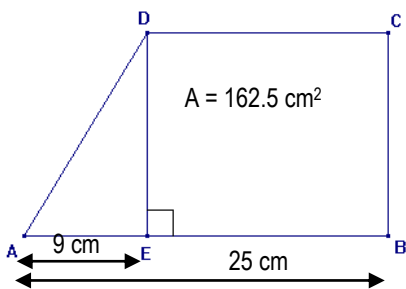


8. Berechne im Rhomboid ABCD (mit Diagonalschnittpunkt M) die Länge der Strecke DM, wenn $AB = 26\text{cm}$, $AM = 22\text{cm}$ und die Fläche 832 cm^2 beträgt.

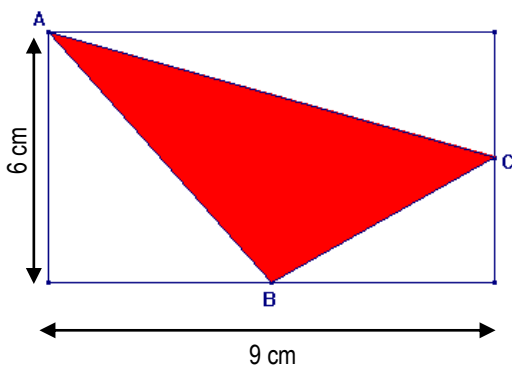


Skizze:

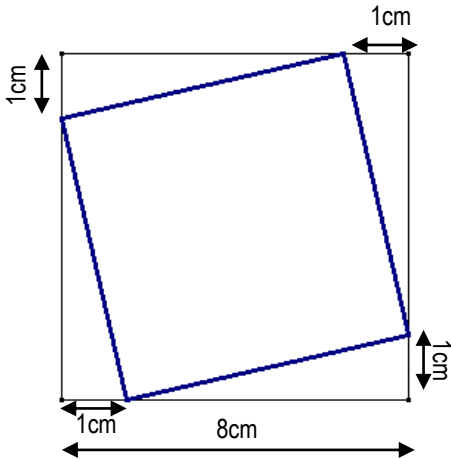
9. Berechne im rechtwinkligen Trapez ABCD die Längen der Strecken DC, AD sowie DE.



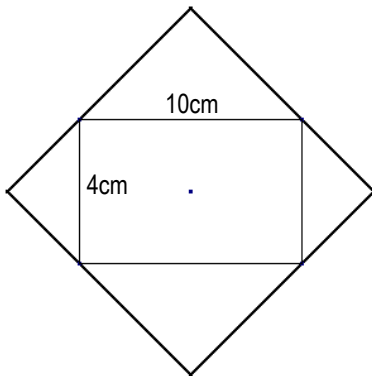
10. Berechne den Inhalt der rot markierten Fläche (B und C sind Seitenmittelpunkte)



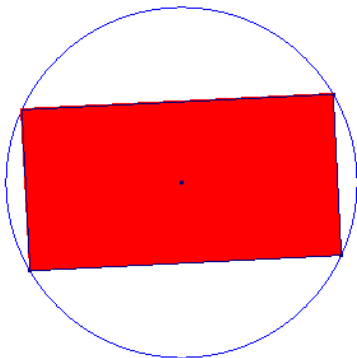
10. In eine Quadrat mit Seitenlänge 8cm wird ein kleineres Quadrat eingeschrieben (siehe Skizze). Berechne den Flächeninhalt des kleinen Quadrates.



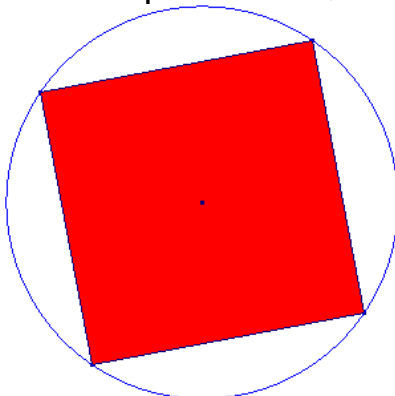
11. Einem Quadrat ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 10cm und 4cm eingeschrieben. Berechne den Flächeninhalt des umschriebenen Quadrates



12. Welchen Durchmesser muss der Baumstamm (hier als Kreis dargestellt) mindestens haben, damit man einen Balken mit einem rechteckigen Querschnitt (16 x 26 cm) daraus aussägen kann?



13. Welchen Durchmesser muss der Baumstamm (hier als Kreis dargestellt) mindestens haben, damit man einen Balken mit quadratischem Querschnitt (Kantenlänge 8cm) aussägen kann?



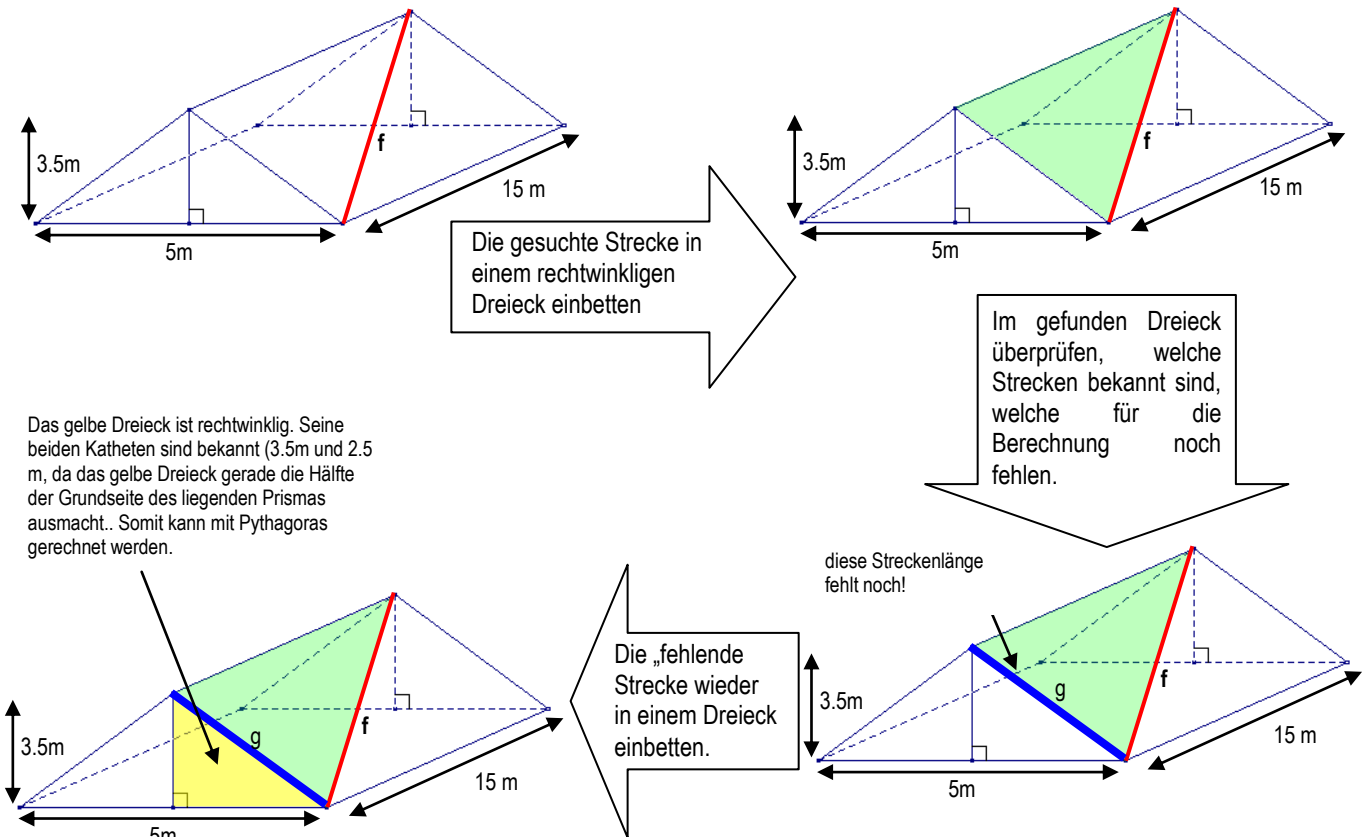
4. Berechnungen mit dem Satz von Pythagoras im Raum

„Der Satz von Pythagoras gilt also in rechtwinkligen Dreiecken. Das bedeutet, dass wir *in jedem rechtwinkligen Dreieck* aus zwei bekannten Seitenlängen die dritte Seitenlänge berechnen können.“ Dies haben wir ja schon im Kapitel zuvor festgestellt. Im Raum gilt aber genau das Gleiche:

Wir müssen auch im Raum auf die Suche nach rechtwinkligen Dreiecken gehen, damit wir dann in diesen Dreiecken den Satz von Pythagoras anwenden können. Zum Teil brauchen wir auf dem Weg zur Lösung einige Zwischenschritte. Doch Schritt für Schritt kommen wir in verschiedenen rechtwinkligen Dreiecken zum Ziel.

Musteraufgabe:

Berechne die Länge der Strecke f im dreiseitigen, geraden Prisma



→ Wir rechnen jetzt der Reihe nach:

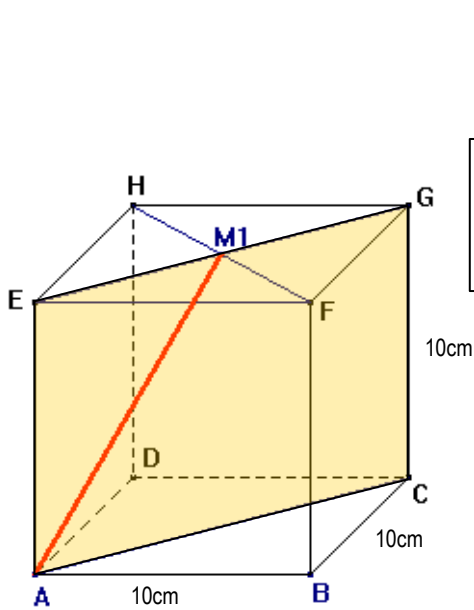
1. Die blaue Strecke g ist im gelben Dreieck Hypotenuse. Die Berechnung lautet somit:

$$g = \sqrt{2.5^2 + 3.5^2} = \sqrt{6.25 + 12.25} = \sqrt{18.5} \text{ (nicht weiter ausrechnen!)}$$

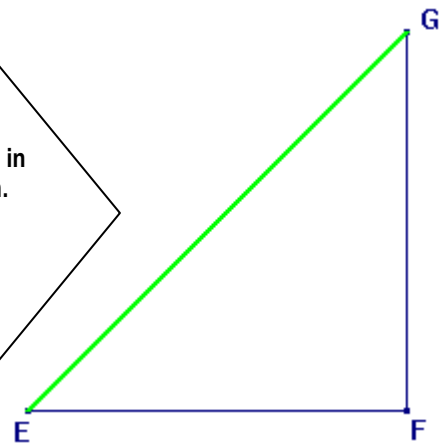
2. Jetzt wechseln wir ins grüne Dreieck, dort ist g Kathete und die gesuchte Strecke f ist Hypotenuse. Es gilt also:

$$f = \sqrt{15^2 + g^2} = \sqrt{15^2 + (\sqrt{18.5})^2} = \sqrt{225 + 18.5} = \sqrt{243.5} = 15.60448653 \approx \mathbf{15.61 \text{ m}}$$

c) Konstruktion der Fläche und der Strecke in wahrer Form und Grösse (hier aus Platzgründen im Masstab 1:2)

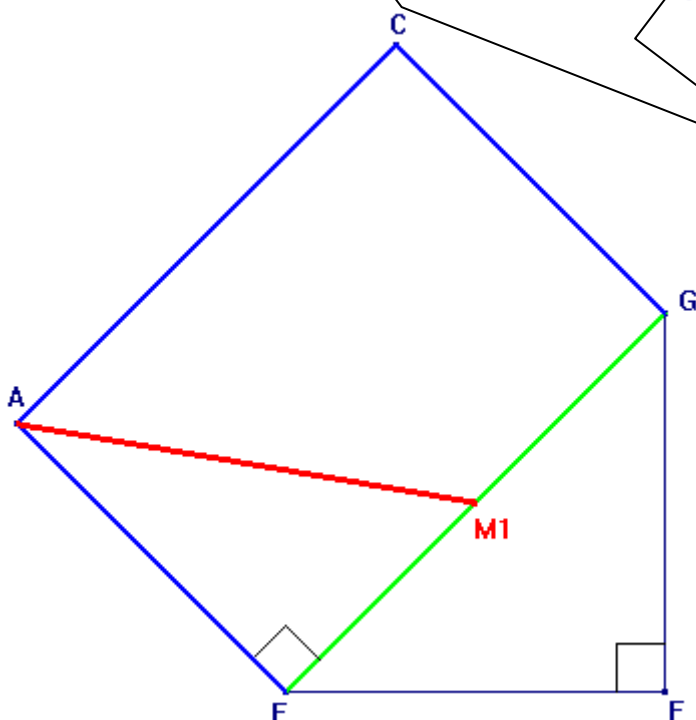
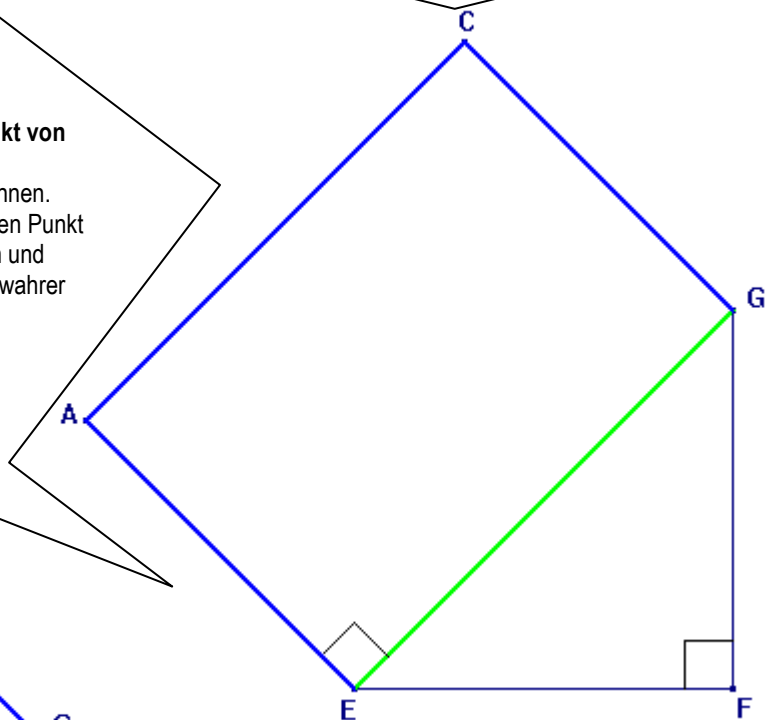


1. Das rechtwinklige Dreieck EFG in wahrer Grösse herauszeichnen.
($EF = 10\text{cm}$, $FG = 10\text{cm}$)



2. Die Fläche ACEG ist ein Rechteck. Sie hat also rechte Winkel. Diese werden jetzt eingezeichnet (Senkrechte zu EG!). Danach messen wir die Kantenlänge $AE = 10\text{cm}$ ab und können die Fläche ACEG vollständig einzeichnen.

3. Die Strecke AM1 verläuft vom Punkt M1 aus. Dieser ist der Mittelpunkt von EG. Also können wir ihn konstruieren und einzeichnen. Danach müssen wir diesen Punkt nur noch mit A verbinden und schon haben wir AM1 in wahrer Grösse.



Wichtiger Tipp:

Die Konstruktion folgt also genau dem Berechnungsweg. Wir brauchen die genau gleichen rechtwinkligen Dreiecke, in denen wir Pythagoras anwenden und zeichnen sie Schritt für Schritt auf.

(Die Konstruktion wird verschachtelt, weil wir, sobald eine Strecke konstruiert ist, diese gleich für die nächste Konstruktion verwenden!)

3. Berechne die Länge der Strecke M1M2 und konstruiere sie in wahrer Grösse (AB=4cm, BC=3cm, CG=2cm).

