Name:

Mathematik-Dossier
2 – Die Welt der natürlichen Zahlen – Teil A
(angepasst an das Lehrmittel Mathematik 1)

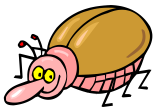
Inhalt:

Themenbereich 2a (Potenzen/Regeln und Gesetze)

- **Die erste Stufe der Operationen: Addition und Subtraktion und ihre Verbindung**
- **Die zweite Stufe der Operationen: Multiplikation und Division und ihre Verbindung**
- **Die Verbindung von Operationen verschiedener Stufe (ohne Distributivgesetz)**
- **Das Distributivgesetz und seine Anwendung (Verbindung von Operationen erster und zweiter Stufe)**
- **Potenzen, grosse Zahlen**

Verwendung:

Dieses Dossier dient der Repetition und Festigung innerhalb der obgenannten Themen. Es beinhaltet einen kurzen Theorie-Teil, sowie verschiedene Übungen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem *gekennzeichnet.*

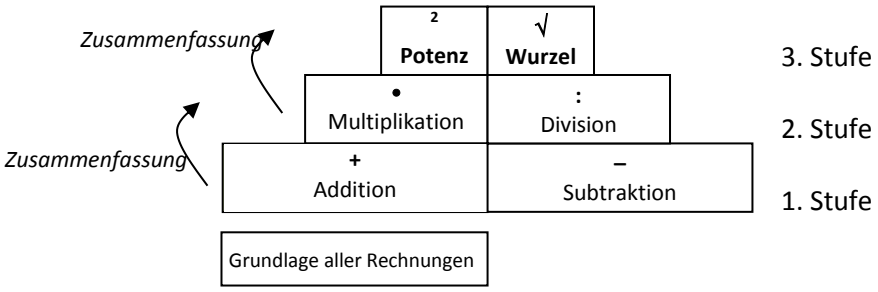
Die <u>Aufgaben müssen in der Freizeit</u> (oder in der Hausaufgabenstunde) <u>gelöst werden</u>. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden.

Wichtig: Die Aufgaben erfordern ein konzentriertes Vorgehen. Es ist daher sinnvoll, mindestens während 15 Minuten am Stück daran zu arbeiten, mit Vorteil bearbeitest du ein ganzes Kapitel aufs Mal.

1. Die erste Stufe der Operationen – Addition und Subtraktion

1.1 Die Operationen in der Übersicht:

Die „Mutter aller Rechnungen“ ist die Addition. Sie ist die Grundlage aller Rechnungen. Ihre Grundlage ist wichtig für alle anderen Stufen und Operationen, da sie alle auf der Addition aufbauen. Die 2. Stufen-Operationen Multiplikation (als Spezialfall der Addition) und Potenzrechnung (als Spezialfall der Multiplikation) genauso, wie die jeweiligen Umkehroperationen Subtraktion (Umkehrung der Addition), Division (Umkehrung der Multiplikation) und Wurzelrechnung (Umkehrung der Potenzrechnung). Das Pyramidenprinzip der Operationen sieht so aus:



Begriffe:	*Operation*		*Termbegriff*
	Addition	➔	Summand + Summand = Summe
	Subtraktion	➔	Minuend – Subtrahend = Differenz
	Multiplikation	➔	Faktor • Faktor = Produkt
	Division	➔	Dividend : Divisor = Quotient

1.2. Die Addition

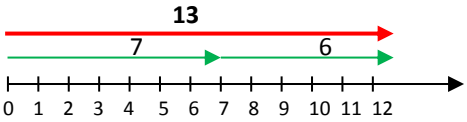
Addieren bedeutet „zusammenzählen“, „plus-rechnen“. Die Addition bildet die Grundlage aller anderen Grundoperationen.

7 + **6** = **13**

↑ „plus“ ↑ „gleich“ ↑

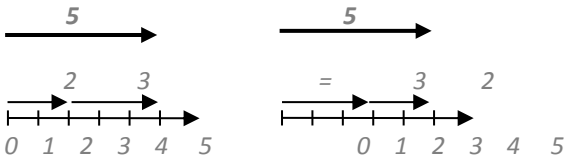
Summanden (bilden eine Summe) — Summe (ausgerechnet)

Zahlenstrahl:



addieren heisst **Pfeile aneinanderreihen**. (Anfang an Spitz)

Gesetzmässigkeiten: ***Die Addition ist kommutativ*** *(Das Vertauschen der Summanden ist erlaubt)*

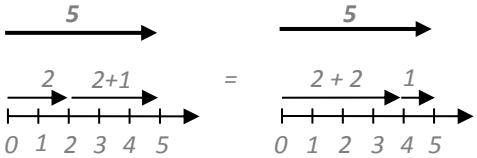


✓

Die Addition ist assoziativ

(Einzelne Summanden können beliebig verbunden werden)

2 + (2 + 1) = (2 + 2) + 1 = 5



✓

Das neutrale Element (verändert nichts) der Addition ist 0: *weil 5 + 0 = 5* ✓

Zusatzinformation
(an dieser Stelle im Lehrmittel nicht vorhanden)

1.3 Die Subtraktion

Subtrahieren bedeutet „wegzählen, „wegnehmen“ , „minus-rechnen“. Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition.

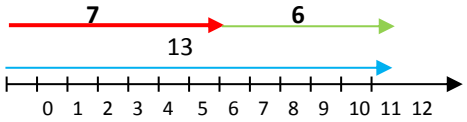
13 - 6 = 7 gilt, WEIL: 7 + 6 = 13 (von hinten her rechnen!)

„minus“ „gleich“ (**Begründung der Subtraktion**)

Minuend Subtrahend Differenz

(bilden eine Differenz) (ausgerechnet)

Zahlenstrahl:



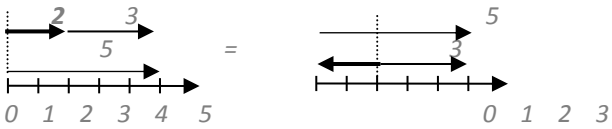
subtrahieren heisst **Pfeile Spitz an Spitz ansetzen. Dann von 0 aus „auffüllen“**

Gesetzmässigkeiten: ***Die Subtraktion ist nicht kommutativ.***

(Der Minuend und der Subtrahend sind nicht vertauschbar)

Zusatzinformation (an dieser Stelle im Lehrmittel nicht vorhanden)

5 – 3 = 2 ≠ 3 – 5



Die Subtraktion ist nicht assoziativ.

(Subtrahenden und Minuenden dürfen nicht frei verbunden werden):

5 – (2 – 1) ≠ (5 - 2) - 1

Das neutrale Element der Subtraktion ist 0: *weil 5 - 0 = 5*

1.4 Die Verbindung von Operationen erster Stufe (Addition und Subtraktion)

Grundlegende Vereinbarung: Rechne immer **von links nach rechts**

Einschränkung: Klammern immer zuerst!

Klammerregel:

Klammer auflösen →

13 + (15 - 7) = **13 + 15 - 7** *Der Wert des Terms darf nicht ändern!*

Klammer setzen ←

13 – (15 – 7) = 13 – 15 + 7 *Der Wert des Terms darf nicht ändern!*

+	• Steht **vor der Klammer ein Pluszeichen**, so darf die **Klammer weggelassen** werden.
—	• Steht **vor der Klammer ein Minuszeichen**, so darf die Klammer nur dann weggelassen werden, wenn die **Operationszeichen in der Klammer geändert** werden (aus Plus wird Minus, aus Minus wird Plus)

Das Operatorkonzept:

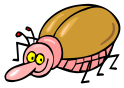
Ein **Operator** besteht aus dem **Operationszeichen und der nachfolgenden Zahl**.
(der „minus 27er“, der „plus 15er“, etc.)

45	- 27	+15	=	45	+15	- 27

Der Austausch von ganzen Operatoren ist erlaubt.

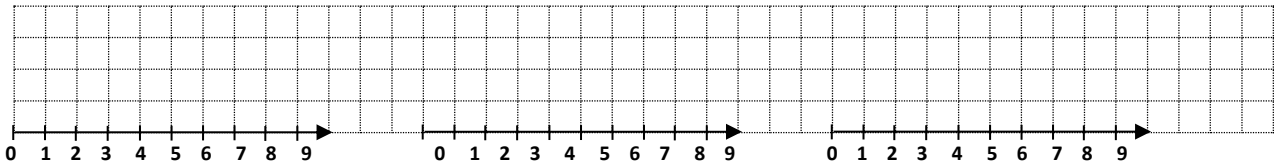
(Wie das Umstellen eines Zuges!)

Aufgaben zu Addition und Subtraktion



1. Löse mit Hilfe von Pfeilen auf dem Zahlenstrahl:

a) 3 + 6 – 4 **b) 8 – (4 + 2)** **c) 4 – 1 + 6**



2. Schreibe die Rechnung aus und löse:

a) Wie heisst der Subtrahend, wenn die Differenz 6704 und der Minuend 9101 ist?

b) Bestimme den Minuenden, wenn der Subtrahend 6801 und die Differenz ein Drittel davon ist.

c) Subtrahend: 828 373.241; Differenz: 17 272.506; Minuend ?

d) Minuend: 0.0134679; Subtrahend: 0.012158; Differenz ?

e) Differenz: 163 717.238; Minuend: 336 282.762; Subtrahend ?

3. Setze in die Kästchen die richtigen Operationszeichen, damit wahre Aussagen entstehen

a) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 = 59

b) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 = 3

c) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 = 67

d) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 = 11

4. Schreibe ohne Klammern. Löse danach mit Hilfe des Operatorkonzeptes möglichst vorteilhaft:

Term	*Ohne Klammern*
a) 1753 + (247 – 63) – (37 + 19) – (81 - 57) =	
jetzt lösen mit Operatorkonzept:	
b) 3470 - (670 - 490) - (390 + 460) - (840 - 520) =	
jetzt lösen mit Operatorkonzept:	

5. Berechne die folgenden Ausdrücke mit dem Operatorkonzept und / oder durch Klammern setzen oder auflösen möglichst geschickt. Schreibe die Zwischenschritte auf.

a) 847 - 383 + 283 - 19 – 28

b) 884 - 446 - 54 + 313 + 527 - 240

c) 781 - 190 - 281 + 370 + 20

d) 778 + 15 + 622 - 155 + 840

e) 4832 + (3719 - 132) - (519 - 47)

f) 79 437 - (72 514 - 10 563) + (15 309 - 7486)

6. Welche natürlichen Zahlen musst du für die Variable einsetzen, damit wahre Aussagen entstehen?

a) 430 - (70 - y) = 394 *y=*

b) 7500 + (5700 - z) = 2700 *z=*

c) 89 + (70 + x) = 220 *x=*

d) y - (720 - 510) = 660 *y=*

2. Die zweite Stufe der Operationen – Multiplikation und Division

2.1. Die Multiplikation (Sonderfall der Addition mit lauter gleichen Summanden)

Multiplizieren bedeutet „malrechnen“, „vervielfachen“. Die Multiplikation ist ein Sonderfall der Addition mit lauter gleichen Summanden.

4 + 4 + 4 + 4 + 4

5 gleiche Summanden („4en“)

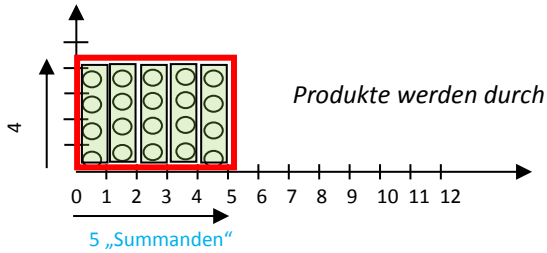
5 • 4 = **20**

„mal“ „gleich“

Faktor **Faktor** **Produkt**

(bilden ein Produkt) (ausgerechnet)

Darstellungsform: Punktdarstellung



Produkte werden durch Flächen dargestellt.

Gesetzmässigkeiten: **Spezialfall Null:** **Ein Produkt ist gleich Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.**

5 • 0 = 0 15421 • 1565478974 • 0 • 45664 = 0

Dezimalzahlen: 15.3 • 7.286 = 111.4758

1 Dez. stelle 3 Dez. Stellen 4 Dezimalstellen (1 + 3)

Ein Produkt von Dezimalzahlen hat so viele Stellen nach dem Komma, wie die Summe aller Kommastellen der Faktoren ergibt.

Zusatzinformation (an dieser Stelle im Lehrmittel nicht vorhanden)

Die Multiplikation ist kommutativ. *(Das Vertauschen der Faktoren ist erlaubt).*

4 • 3 = 3 • 4 ✓
12 = 12

Die Multiplikation ist assoziativ. *(Das Verbinden von Faktoren ist zulässig).*

(5 • 2) • 8 = 5 • (2 • 8) ✓
10 • 8 = 5 • 16
80 = 80

Das neutrale Element *(verändert nichts)* ***der Multiplikation ist 1:*** *Weil 5 • 1 = 5*

2.2. Die Division (Umkehrung der Multiplikation)

Dividieren bedeutet „aufteilen“, „teilen“. Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation

24 : 4 = 6 **weil 6 • 4 = 24** *(von hinten her rechnen)*

„durch“ „gleich“ Die Begründung der Division ist die Multiplikation)

Dividend **Divisor** **Quotient**

(bilden einen Quotienten) (ausgerechnet)

Gesetzmässigkeiten: **Spezialfall Null:**

Null als Dividend: 0 : 5 = 0 weil 0 • 5 = 0
0 : 17 = 0 weil 0 • 17 = 0

0 :

Null als Divisor: 6 : 0 ≠ 0, weil 0 • 0 ≠ 6
0 : 0 = 0 weil 0 • 0 = 0
0 : 0 = 5 weil 5 • 0 = 0 nicht eindeutig!

: 0 VERBOTEN

Darum: Die Division durch Null ist verboten

Zusatzinformation
(an dieser Stelle im Lehrmittel nicht vorhanden)

Die Division ist nicht kommutativ.
(Der Divisor und der Dividend dürfen nicht vertauscht werden):

16 : 8 ≠ 8 : 16
2 ≠ ½

Die Division ist nicht assoziativ?
(Das Setzen von Klammern um Divisoren oder Dividend ist nicht erlaubt):

(12 : 6) : 2 ≠ 12 : (6 : 2)
2 : 2 ≠ 12 : 3
1 ≠ 4

***Das neutrale Element** (verändert nichts) **der Division ist 1:** weil 5 : 1 = 5*

2.3. Die Verbindung von Operationen zweiter Stufe (Multiplikation und Division)

Grundlegende Vereinbarung: Rechne immer **von links nach rechts**

Einschränkung: *Klammern immer zuerst behandeln.*

Klammerregel: ***Klammer auflösen*** →

13 • (81 : 9) = **13 • 81 : 9** *Der Wert des Terms darf nicht ändern!*

← ***Klammer setzen***

36 : (4 • 3) = 36 : 4 : 3 *Der Wert des Terms darf nicht ändern!*

•	• Steht **vor der Klammer ein Malzeichen**, so darf die **Klammer weggelassen** werden.
: • :	• Steht **vor der Klammer ein Divisionszeichen**, so darf die Klammer nur dann weggelassen werden, wenn die **Operationszeichen in der Klammer geändert** werden (aus Mal wird Durch, aus Durch wird Mal)

Das Operatorkonzept:

Ein **Operator** besteht aus dem **Operationszeichen und der nachfolgenden Zahl**.
(der „durch 9er“, der „mal 18er“, etc.)

84 : 9 • 18 = 84 • 18 : 9

Der Austausch von ganzen Operatoren ist erlaubt.
(Wie das Umstellen eines Zuges!)

3. Gesetze: Das Assoziativ- und das Kommutativgesetz

3.1. Das Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

Das **Kommutativgesetz gilt bei der Multiplikation und bei der Addition** (Dort heissen die beteiligten Bestandteile des Terms ja auch gleich: Summand rsp. Faktor). Bei diesen beiden Operationen dürfen die Summanden / Faktoren beliebig vertauscht werden.

4+ 5 = 5+ 4	Bei der Addition dürfen die Summanden vertauscht werden
4• 6 = 6•4	Bei der Multiplikation dürfen die Faktoren vertauscht werden

Die Division und die Subtraktion sind nicht kommutativ!

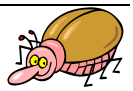
3.2. Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

Das Assoziativgesetz erlaubt es, bei der **Addition oder Multiplikation** beliebige Summanden / Faktoren in Klammern zusammenzufassen und auf diese Art "bevorzugt" zu behandeln (da die Regel "Klammer zuerst" gilt, kann auf diese Weise eine günstige Zusammensetzung von Summanden/Faktoren genützt werden, um einfach rechnen zu können.

15 + (8 + 7) = (15 + 8) + 7	Bei der Addition dürfen beliebige Summanden zusammengefasst werden
15 • (2 • 3) = (15 • 2) • 3	Bei der Multiplikation dürfen beliebige Faktoren zusammengefasst werden

Division und Subtraktion sind nicht assoziativ.

Aufgaben zu Multiplikation und Division



1. Schreibe die Rechnung aus und löse:

a) Wie heisst der Quotient, wenn der Divisor 23, der Dividend 207 beträgt?

.....

b) Bestimme das Produkt, wenn der eine Faktor 18 und der andere 7 ist.

.....

c) Das Produkt beträgt 324, ein Faktor ist 9. Bestimme den zweiten Faktor.

.....

d) Bestimme den Quotienten, wenn der Dividend gleich dem Produkt aus 2 und 33, der Divisor gleich 11 ist

.....

e) Dividiere das Produkt aus 156 und 4 durch den Quotienten aus 416 und 4. Bestimme den Quotienten.

.....

2. Setze in die Kästchen die richtigen Operationszeichen, damit wahre Aussagen entstehen

a) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 = 5

b) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 =245

c) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 = 3920

d) 1008 ☐ (28 ☐ 4) = 1008 ☐ 28 ☐ 4 = 9

3. Schreibe ohne Klammern. Löse danach mit Hilfe des Operatorkonzeptes möglichst vorteilhaft:

Term	*Ohne Klammern*
a) 300 • (28 : 7) : (20 • 5) : (15 : 5) =	.....
jetzt lösen mit Operatorkonzept:	.....
	.....
	.....
	.....
b) 10 • (25 • 4) : (50 • 5) : (5 : (80: 4)) =	.....
jetzt lösen mit Operatorkonzept:	.....
	.....
	.....
	.....

4. Berechne die folgenden Ausdrücke mit dem Operatorkonzept und / oder durch Klammern setzen oder auflösen möglichst geschickt. Schreibe die Zwischenschritte auf.

a) 820 : 10 : 41 : 2

b) 1851 : (617 : 15)

c) 999 • 2 : 9

d) 580 : 29 : 5 • 2

e) 156 • 18 : 13 : 2

5. Welche Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründe deinen Entscheid.

a) 0• 15 = 15 *O w O f* .....

b) 0: 15 = 0 *O w O f* .....

c) *15 : 0 = 0* *O w O f* .....

d) 6 : 6 < 6 • 6 *O w O f*

e) 12 : 0 = 0 • 15 *O w O f*

Fragen / Dinge auf die ich achten will: *(Raum für eigenen Notizen und Fragen)*

4. Die Verbindung von Operationen verschiedener Stufe

Operationen kommen selten nur in einer Stufe vor. Oft werden Multiplikation und Addition, Division und Subtraktion „bunt“ gemischt. Damit man trotzdem den Überblick behält, ist es wichtig, genaue Regeln zu haben, wie man mit den Verbindungen der verschiedenen Operationen umgehen muss.

Grundlegende Vereinbarung: Rechne immer **von links nach rechts**

1. Einschränkung: ***Klammern*** *immer* ***zuerst****!*

2. Einschränkung: *Operationen* ***höherer Stufe*** *haben* ***Vorrang*** *(„Punkt vor Strich“, also 2. Stufe vor erster Stufe)!*

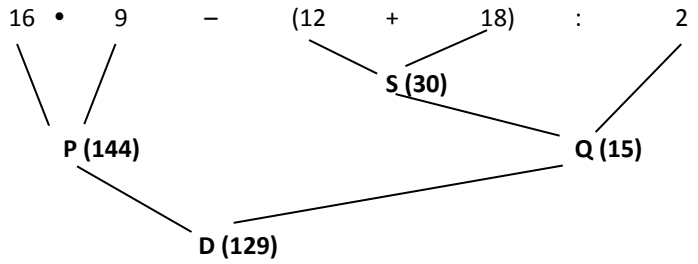
Der Grund für die 2. Einschränkung ist die Tatsache, dass die Operationen höherer Stufe stärker "binden", als diejenigen tieferer Stufe. Dies liegt daran, dass die höhere Stufe ja als „Vereinfachung“ der tieferen Stufe gebildet wurde. Eine Multiplikation ist somit eine "versteckte" Addition und muss daher zuerst behandelt (aufgelöst - ausgepackt) werden.

Termanalyse durch Strukturbaum:

Mit dem Strukturbaum versuchen wir, diese „Zusammengehörigkeit“ von einzelnen Teilen eines Terms darzustellen. So müssen wir die Rechenregeln immer der Reihe nach befolgen. Also zuerst immer alle Klammern behandeln, dann die Operationen höherer Stufe, dann diejenigen tieferer Stufe.

Die Abkürzungen bedeuten:

S = Summe (Summand + Summand)
D = Differenz (Minuend – Subtrahend)
P = Produkt (Faktor mal Faktor)
Q = Quotient (Dividend durch Divisor)

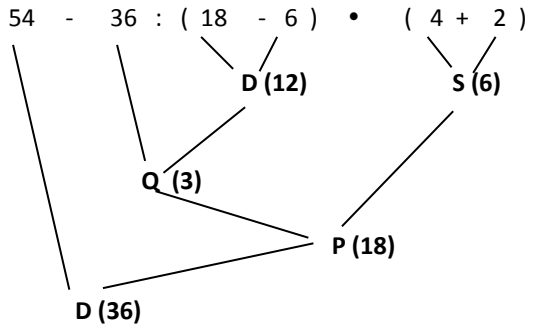


Kriterien:

Klammer zuerst

Punkt vor Strich

v. links n. rechts



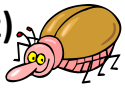
Kriterien:

Klammern zuerst

Punkt vor Strich / von links nach rechts

von links nach rechts

Aufgaben zur Verbindung Operationen verschiedener Stufe (ohne Distributivgesetz)



1. Zeichne für die folgenden Terme einen Strukturbaum und bestimme die entsprechenden Resultate (schreibe gerade in den Strukturbaum hinein)

a) 32 • (5 – 2) + 15 : 3

b) 56 - (123 • 2) : (8 – 2) + 4

c) (5 – 2 • 2) • 45 : 15 - 3

d) 3 • (18 – 34 :2) + 12345 – 23 • 5

2. Schreibe die Rechnung aus und löse:

a) Addiere zu 24 das Produkt von 7 und 12

.....

b) Subtrahiere vom Quotienten von 108 und 18 das Produkt von 1 und der Summe aus 2 und 3

.....

c) Dividiere die Summe von 26 und 13 durch ihre Differenz

.....

d) Multipliziere den Quotienten von 12 und der Differenz aus 8 und 2 mit der Summe aus 3 und dem Vierfachen aus 3.

.....

3. Schreibe, wo nötig mit Klammern, so dass richtige Aussagen entstehen:

a) 18 • 8 – 3 = 90 .....

.....

b) 90 – 88 + 5 • 25 = 175 .....

.....

c) 15 : 8 – 3 + 34 = 37 .....

4. Bestimme den Wert der folgenden Terme. Notiere zur Sicherheit alle Zwischenschritte.

a) 51 + 48 : 6 - 5 + 6 • (5 + 8 : 4) .....

.....

b) 58 : (30 - 2 • 6 + 33 : 3) – (6: (4-1))

.....

.....

Fragen / Dinge auf die ich achten will: *(Raum für eigenen Notizen und Fragen)*

.....

.....

.....

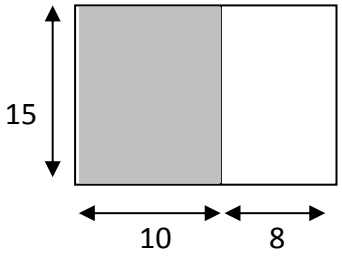
.....

5. Das Distributivgesetz und seine Anwendung.

Das Distributivgesetz (oder „Verteilungsgesetz) hat zwei Anwendungsmöglichkeiten, nämlich Ausklammern und Ausmultiplizieren.

Betrachte die Fläche des unten abgebildeten Rechteckes. Sie berechnet sich bekanntlich „Länge mal Breite“. In unserem Beispiel ist die Fläche des Rechteckes also 15•18 = 270

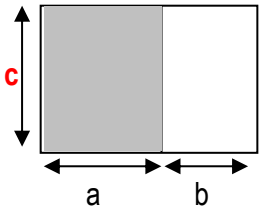
Du siehst auch, dass die Fläche 15 • 18 gleich der Fläche 15 • 10 + 15 • 8 ist, da man genausogut zuerst das graue Teilrechteck berechnen könnte und danach das weisse Teilrechteck. Um die Fläche des ganzen Rechtecks zu erhalten, müssen wir die beiden Ergebnisse addieren. Ebenso könnten wir schreiben, dass die Länge des grossen Rechtecks gerade der Summe der beiden Teilstrecken 10 und 8 entspricht.
Wir stellen also fest, dass 15 • 18 = 15 • 10 + 15 • 8 = 15 • (10 + 8) ist.



Ausmultiplizieren: 15 • (10 + 8) = 15 • 10 + 15• 8. Der Faktor vor der Klammer muss also auf beide Summanden in der Klammer „verteilt“ werden.
Man muss von beiden Teilrechtecken die Fläche berechnen, also beide Teilstrecken mit der „Breite“ multiplizieren.

Ausklammern: 15 • 10 + 15• 8 = 15 • (10 + 8). Der gemeinsame Faktor (hier: die „Breite“ 15) wird ausgeklammert, man berechnet also zuerst die Summe der beiden Teilstrecken 10 + 8 und multipliziert dann erst mit 15.

Zusammengefasst:



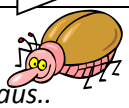
$$c \bullet (a + b) = c \bullet a + c \bullet b$$

Ausmultiplizieren *(c auf a und b verteilen)*

$$c \bullet a + c \bullet b = c \bullet (a + b)$$

Ausklammern *(gemeinsamer Faktor vor die Klammer)*

Übungen / Beispiele zum Distributivgesetz



Kreuze an, ob du Ausklammern oder Ausmultiplizieren musst und schreibe diese Form auf und rechne aus..

Beispiel:
34 • (4 – 2c) = **34 • 4 - 34•2c = 136 – 68 c**
(Ausmultiplizieren)

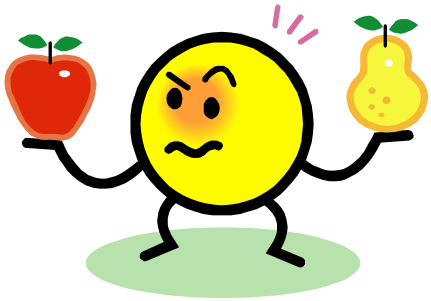
		Ausklammern	Ausmultiplizieren
a)	12 • (b + e)		
b)	b • 17 – 7 •b		
c)	6 • (18 - y)		
d)	13 • a + 39		
e)	23 •x – x		
f)	24 + r • 8		
g)	(m - 3) •8		

Achtung, manchmal ist der gemeinsame Faktor “versteckt”, z.B.
36 – 18 • x = **2•18 – 18•x = 18 • (2-x)**
(Ausklammern)

		Ausklammern	Ausmultiplizieren
h)	49 - 49 • n		
i)	64 + 16 •e		
j)	7 • (p - 1)		
k)	560 - z • 80		
l)	a •17 - 17 •b		
m)	63 - 7 • y		
n)	(x - 1) • 4		

6. Vergleichszeichen in der Mathematik

In der Mathematik und in allen Naturwissenschaften werden häufig verschiedene Vergleiche angestellt. Es ist dabei wichtig, dass diese auch durch entsprechende Zeichen dargestellt werden können.



Im Normalfall werden verschiedene Terme (Rechenausdrücke) miteinander verglichen. Dabei wird festgestellt, welcher der vorhandenen Terme einen grösseren oder kleineren Wert hat. Terme können aber auch gleich grosse sein oder es wird eine maximale oder minimale Grenze definiert.

Die gebräuchlichen Zeichen sind:

Zeichen	***gelesen als:***	***Bedeutung:***	***Beispiele:***	
=	*Gleich*	gleichwertig	2 + 3 = 5	(beide Terme haben den Wert 5)
≠	*Ungleich*	nicht gleichwertig	2 + 3 ≠ 7	(der eine Term hat Wert 5, der andere Wert 7)
>	*grösser als*	grösser als	7 > 5	(die 7 ist grösser als die 5)
<	*kleiner als*	kleiner als	34 < 1+49	(die 34 ist kleiner als der Wert 50)
≥	*grösser gleich*	mindestens gleich	x ≥ 40	(für x kann jede Zahl ab 40 eingesetzt werden → also 40, 41, 42, 43… alle sind grösser oder gleich 40)
≤	*kleiner gleich*	höchstens gleich	x ≤ 30	(für x kann jede Zahl bis 30 eingesetzt werden → also 0, 1, 2, … , 29, 30 alle sind kleiner oder gleich 40)

7. Potenzen (Dritte Stufe der Operationen)

Als Vereinfachung von Multiplikationen mit gleichen Faktoren ist die Potenzrechnung die drite Stufe der Grundoperationen. Zusammen mit ihrer Umkehrung, dem Wurzelrechnen oder Radizieren, bildet sie die „stärkste“ Bindung aller Grundoperationen.

Potenzrechnen wird auch als „hochrechnen“ bezeichnet. Dabei gibt es eine Basiszahl und eine Hochzahl (Exponent). Die Potenzrechnung ist die Vereinfachung der Multiplikation.

$\underbrace{5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5}_{\text{8 gleiche Faktoren (8 „Fünfen“)}} = 5^8$

Die „Hochzahl“ zeigt, wie viele gleiche Faktoren vorkommen. (= Exponent, hier 8)

Die Art der gleichen Faktoren wird mit der Basis angezeigt. (Basis = 5, da nur Fünfen multipliziert werden)

Potenz: a^n ← n: Exponent

a: Basis

7.1 Spezialfälle:

Exponent 0: $a^0 = 1$, $5^0 = 1$ ➔ **Ist der Exponent 0, so hat die Potenz immer den Wert 1**.

Exponent 1: $a^1 = a$, $5^1 = 5$ ➔ Der **Exponent 1 verändert die Basis nicht**. *(neutrales Element)* ➔ *Der Exponent 1 wird daher nicht geschrieben.*

Exponent 2: **Spezielle Potenzen sind die Quadratzahlen.** Also Quadratzahlen werden alle Potenzen mit Exponent 2 bezeichnet. Geometrisch gesehen bilden Potenzen mit Exponent 2 die Fläche eines Quadrates (Länge mal Breite, wobei beide gleich sind). Aus diesem Grund haben sie auch ihren Namen erhalten.

Exponent 3: Die Potenzen mit Exponent 3. Sie heissen „**Kubikzahlen**“. z.B. $3^3 = 27$, $2^3 = 8$

Zusatzinformation
(an dieser Stelle im Lehrmittel nicht vorhanden)

7.2 Geometrische Interpretation der Quadratzahlen (Potenz mit Exponent 2)

Ein Quadrat mit Seitenlänge s hat die Fläche s^2 (s • s). Entsprechend kann man von der Fläche s^2 auf die Quadratseite zurück schliessen, indem man die Zahl bestimmt, deren Quadrat gerade der Fläche entspricht (Die Seitenlänge ist also = s, weil s • s = s^2) (Man macht also die umgekehrte Überlegung als bei der Flächenberechnung)

Dazu zwei Zahlenbeispiele:

- *Ein Quadrat mit Seitenlänge 5cm hat die <u>Fläche 25 cm^2</u>*
  (denn Länge • Breite = Fläche, also 5 • 5 = 25)
- *Ein Quadrat mit der Fläche 49cm^2 hat die <u>Seitenlänge 7cm</u>*
  (weil eine Zahl gesucht wird, deren Quadrat 49 ergibt. Man sucht sozusagen die Unbekannte x, für die gilt x • x = 49. Hier ist x die Zahl 7, denn 7 • 7 = 49).

Zusatzinformation
(an dieser Stelle im Lehrmittel nicht vorhanden)

7.3 Die ersten zwanzig Quadratzahlen in der Übersicht

Nachfolgend eine Liste der Zahlen von 1 bis 20 und ihrer Quadratzahlen. Speziell beim Rechnen mit Wurzeln und – später auch – in der Geometrie (Satz des Pythagoras) – sind diese Quadratzahlen wichtig. Es lohnt sich, diese alle auswendig zu kennen.

Zahl (n)	Quadratzahl (n^2)
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Zahl (n)	Quadratzahl (n^2)
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400

Fragen / Dinge auf die ich achten will: *(Raum für eigenen Notizen und Fragen)*

Aufgaben „Rechnen mit Potenzen“

1. Schreibe die folgenden Rechnungen in den nächst höheren Operationsstufen und rechne danach aus:

	Term	In nächst höherer Stufe:	Ergebnis
a)	5 + 5 + 5 + 5 + 5		
b)	7 • 7 • 7 • 7 • 7 • 7		
c)	x • x • x • x		
d)	0.5 • 0.5 • 0.5		
e)	5 + 5 + 5 + x + x		

2. Berechne die folgenden Terme (Beachte die Potenzregeln und die Regeln für die Anzahl Kommastellen)

a) 19^2

b) 0.2^2

c) 7^3

d) 0.2^4

3. Welches der Zeichen <, = oder > musst du für den Platzhalter einsetzen, damit eine wahre Aussage entsteht?

a) 0.1^6 ☐ 0.1^6 ☐ =

b) 2^5 ☐ 5^2 ☐ =

c) 0.01^4 ☐ 0.1^5 ☐ =

d) 4^3 ☐ 3^4 ☐ =

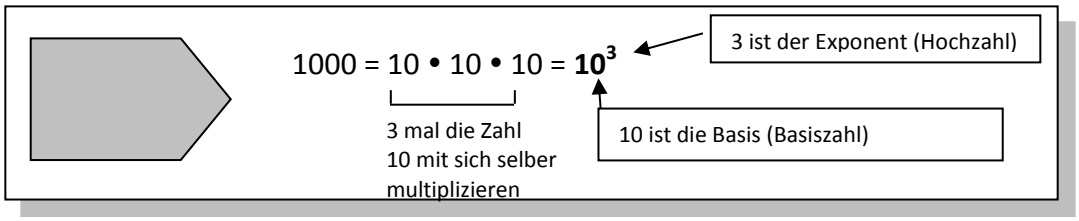
e) 0.01^6 ☐ 0.1^3 ☐ =

Fragen / Dinge auf die ich achten will: *(Raum für eigenen Notizen und Fragen)*

8. Grosse Zahlen und Stellenwertsysteme

8.1 Potenzschreibweise im 10er-System (Dezimalsystem)

Alle Zahlen, die ein Vielfaches von 10 sind, lassen sich als sogenannte „Zehnerpotenzen“ schreiben:



Bei **Zehnerpotenzen beschreibt der Exponent, wie viele Nullen die Zahl hat.**

Es gilt:	$10^0 = 1$	(Definition, eine 1 mit 0 Nullen…)	
	$10^1 = 10$	(eine 1 mit 1 Null)	
	$10^2 = 100$	(eine 1 mit 2 Nullen)	
	$10^3 = 1000$	(eine 1 mit 3 Nullen)	➔ Abkürzung Kilo (Tausend➔ Kilogramm)
	$10^6 = 1$ Mio	(eine 1 mit 6 Nullen)	➔ Abkürzung Mega (Million ➔ Megawatt)
	$10^9 = 1$ Mia	(eine 1 mit 9 Nullen)	➔ Abkürzung Giga (Milliarde ➔ Gigabyte)
	$10^{12} = 1$ Billion	(eine 1 mit 12 Nullen)	➔ Abkürzung Terra (Billion ➔ Terrajoule)
	$10^{18} = 1$ Trillion	(eine 1 mit 18 Nullen)	
	usw.		

Die Zehnerpotenzen können natürlich für jede beliebige Zahl verwendet werden:

$6000 = 6 \bullet 1000 = 6 \bullet 10^3$ 6 Millionen $= 6 \bullet 1$ Million $= 6 \bullet 10^6$

Die Zahl 345000 ist somit $345 \bullet 1000 = 345 \bullet 10^3$

Nun ist es für Zahlen übersichtlicher, wenn sie mit einem möglichst **kleinen Zahlteil** und einem möglichst **grossen Exponenten** geschrieben werden können. Man arbeitet dabei mit Kommastellen. Es gilt dabei

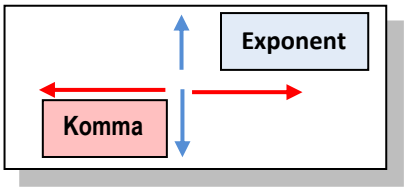
$345000 = 345 \bullet 1000 = 345 \bullet 10^3 = 34{,}5 \bullet 10^4 = 3{,}45 \bullet 10^5$

Das Verschieben des Komma nach links hat somit pro Stelle einen zunehmen grösseren Exponenten zur Folge und umgekehrt.

$345000 = 345 \bullet 10^3 = 34{,}5 \bullet 10^4 = 3{,}45 \bullet 10^5$

Komma 1 Stelle nach links ➔ Exponent + 1

Komma 1 Stelle nach links ➔ Exponent + 1



Fragen / Dinge auf die ich achten will: *(Raum für eigenen Notizen und Fragen)*

8.2 Der Aufbau des Dezimalsystems (10er-System)

Unser Zehnersystem kennt Zahlen, die aus 10 verschiedenen Ziffern zusammengesetzt sind. Die Ziffern, die wir dabei verwenden sind die 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

> 10 Ziffern → Unendlich viele Zahlen
>
> Dies funktioniert, weil j**ede Zahl einen Eigenwert und einen Stellenwert hat.** Denn je nachdem, wo eine Ziffer in der Zahl steht, hat die Zahl einen eigenen Wert.

Unser Dezimalsystem ist demnach ein Stellenwertsystem. Betrachten wir dies etwas genauer:

Wenn wir einem kleinen Kind erklären müssen, aus welchen Bausteinen eine Zahl wie z.B. 1256 besteht, so werden wir ihm wohl sagen: „**Die Zahl besteht aus 6 Einer-Würfelchen, 5 Zehnerstäbchen, 2 Hunderterplatten und 1 Tausenderblock.**“ So kann er diese Zahl mit verschiedenen Bausteinen zusammensetzen. **Dabei ist schon alles gesagt, wir haben den Eigenwert (Anzahl, wieviele von welcher Sorte) und den Stellenwert (Sorte, Grösse) mitgeteilt.**

Beispiel einer Zahl im 10er-System (Dezimalsystem):

Basiszahl (des Dezimalsystemes): **10**
Ziffern: **0 bis 9** (Total 10 Ziffern)

10’000er	*1’000er*	*100er*	*10er*	*1er*
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
4	**5**	**3**	**7**	**9**

Eigenwert:	9 (Anzahl dieser Sorte)
Stellenwert:	Einer (Sorte)

Eigenwert:	7
Stellenwert:	Zehner (10^1-er)

Eigenwert:	3
Stellenwert:	Hunderter (10^2-er)

Eigenwert:	5
Stellenwert:	Tausender (10^3-er)

Eigenwert:	4
Stellenwert:	Zehntausender (10^4-er)

Unsere Zahl setzt sich also aus 9 Einer, 7 Zehner, 3 Hunderter, 5 Tausender und 4 Zehntausender zusammen. Man kann sie entsprechend auch so schreiben und lesen

45379 = 4 • 10'000 + 5 • 1000 + 3 • 100 + 7 • 10 + 9 • 1
(fünfundvierzigtausend – dreihundert neunundsiebzig)

oder mit 10er-Potenzen:

$$45379 = 4 \bullet 10^4 + 5 \bullet 10^3 + 3 \bullet 10^2 + 7 \bullet 10^1 + 9 \bullet 10^0$$

Zusatzinformation (an dieser Stelle im Lehrmittel nicht vorhanden)

8.3 Der Aufbau von weiteren Stellenwertsystemen:

Alle anderen Stellenwertsysteme sind genau gleich aufgebaut, wie das 10er-System. Hast du das oben verstanden, ist der Rest kein Problem mehr und du kannst mit allen anderen Stellenwertsystemen gut umgehen. Entscheidend für die Berechnungen und Wert-Bestimmung ist auf jeden Fall die Basiszahl:

Basiszahl:

- *Sie sagt uns, wie viele Ziffern das System hat.*
- *Sie ermöglicht uns, die Stellenwerte im Zahlsystem zu bestimmen.*

Name des Stellenwertsystems	Anzahl Ziffern	mögliche Ziffern	Stellenwerte …	fünftletzte Stelle	viertletzte Stelle	drittletzte Stelle	zweitletzte Stelle	letzte Stelle
10er-System	10	0 bis 9	…	10'000er $= 10^4$	1000er $= 10^3$	100er $= 10^2$	10er $= 10^1$	1er $= 10^0$
2er-System	2	0, 1	…	16er $= 2^4$	8er $= 2^3$	4er $= 2^2$	2er $= 2^1$	1er $= 2^0$
4er-System	4	0, 1, 2, 3	…	256er $= 4^4$	64er $= 4^3$	16er $= 4^2$	4er $= 4^1$	1er $= 4^0$
5er-System	5	0, 1, 2, 3, 4	…	625er $= 5^4$	125er $= 5^3$	25er $= 5^2$	5er $= 5^1$	1er $= 5^0$
6er-System	6	0, 1, 2, 3, 4, 5	…	1296er $= 6^4$	216er $= 6^3$	36er $= 6^2$	6er $= 6^1$	1er $= 6^0$
8er-System	8	0 bis 7	…	4096er $= 8^4$	512er $= 8^3$	64er $= 8^2$	8er $= 8^1$	1er $= 8^0$

Dabei ist wichtig, zurückzudenken, wie die Potenzen definiert waren: So bedeutet 4^3, dass die Zahl 4 dreimal mit sich selber multipliziert werden muss, also $4 \bullet 4 \bullet 4 = 16 \bullet 4 = 64$. Und 6^4 heisst $6 \bullet 6 \bullet 6 \bullet 6 = 36 \bullet 6 \bullet 6 = 216 \bullet 6 = 1296$.

Zusatzinformation (an dieser Stelle im Lehrmittel nicht vorhanden)

8.4 Lesen und Schreiben von Zahlen in fremden Stellenwertsystemen:

*Um deutlich zu machen, in welchem Stellenwertsystem eine Zahl geschrieben ist, notieren wird die S**ystemzahl (Basiszahl) in einem tiefergestellten Kreislein rechts von der Zahl.** Im Zehnersystem dürfen wird diese Systemangabe weglassen (dies ist eine Abmachung, eine sinnvolle Vereinfachung, denn wir bewegen uns normalerweise ja im 10er-System).*

***Zahlen, die nicht im Zehnersystem geschrieben sind, können wir nur ziffernweise lesen**, denn in diesen Systemen kommen ja keine Zehner, Hunderter oder Tausender etc. vor.*

Wir schreiben	*Wir lesen:*
$4103_{(5)}$	*Vier, Eins, Null, Drei im Fünfersystem*
$2514_{(8)}$	*Zwei, Fünf, Eins, Vier im Achtersystem*

Angabe der Basiszahl (im Zehnersystem weglassen!)

Zusatzinformation (an dieser Stelle im Lehrmittel nicht vorhanden)

8.5 Umrechnen von Zahlen von fremden Stellenwertsystemen ins Zehnersystem:

Zu jeder Zahl, die in einem fremden Stellenwertsystem geschrieben ist, können wir mittels Stellen- und Eigenwerten die entsprechende (gleichwertige) Zahl im Zehnersystem berechnen:

$2103_{(4)} = 2 \bullet 4^3 + 1 \bullet 4^2 + 0 \bullet 4^1 + 3 \bullet 4^0$	*Jede Ziffer wird mit Eigen- und Stellenwert bestimmt*
$= 2 \bullet 64 + 1 \bullet 16 + 0 \bullet 4 + 3 \bullet 1$	*Die Stellenwerte werden ausgerechnet*
$= 128 + 16 + 0 + 3$	*ab hier sind wir im Zehnersystem und können addieren*
$\mathbf{= 147}$	***Dies entspricht der gleichwertigen Zahl im 10er-System.***

Zusatzinformation
(an dieser Stelle im Lehrmittel nicht vorhanden)

8.6 Umrechnen von Zahlen aus dem Zehnersystem in fremde Stellenwertsysteme:

Um die Zahlen aus dem Zehnersystem in ein anderes Stellenwertsystem umzurechnen, gibt es zwei Methoden. Die eine ist mehr „experimentell", die andere ist sehr mathematisch. Beginnen wir mit der eher „exprimentellen" Methode:

Mit Stellen und Eigenwerten:
Die Zahl 99 soll ins 6er-System übertragen werden.

1. Stellenwerte bestimmen:	*Im Sechsersystem gibt es 1er, 6er, 36er, 216er usw.*
2. Grösstmögliche Stellenwerte auffüllen	*Die grössten hier brauchbaren Stellenwerte sind 36er. In 99 haben genau **2** 36er Platz. Es bleiben 99 - 2 •36 = 27.*
3. Weitere Stellenwerte auffüllen	*In 27 sind **4** 6er enthalten.* *Es bleiben 27 - 4 •6 = 3. Dies sind **3** Einer.*

➔ ***Somit gilt: 99 = 243₆***

Mit einem Algorithmus (Dies ist eine feste Abfolge von Rechenschritten, die aus einer „Eingabe" ein Resultat liefern).

99 soll ins 6er-System übertragen werden.

99	*:*	*6*	*= 16*	*Rest 3*
16	*:*	*6*	*= 2*	*Rest 4*
2	*:*	*6*	*= 0*	*Rest 2*

Taucht hier eine 0 auf, bedeutet dies „STOPP". Der Algorithmus ist zu Ende.

Jetzt werden die Rest-Angaben von **unten nach oben gelesen** und ergeben die gesuchte Zahl:

= 243₆

Übungen Grosse Zahlen und Stellenwertsysteme

1. Nenne zu den untenstehenden Zahlen jeweils die

	die um 6 grössere Zahl			*die um 7 kleinere Zahl*	
a)	1'963'995	.....	e)	16'548'874	.....
b)	99'994	.....	f)	99'999'992	.....
c)	16'987'987	.....	g)	646'879'632	.....
d)	9'909'899	.....	h)	164'846	.....

2. Bestimme die Anzahl der Nullen:

a) 100 Millionen .....
b) 700'000 Trillionen .....
c) 39 Billionen .....
d) 80000 Milliarden .....

3. Schreibe die folgenden Zahlen als Potenz mit der Basis 10 (also als Zehnerpotenz)

Bsp.:	*10'000*	***= 10 ^{4}***
a)	100'000	
b)	1'000	
c)	10'000'000'000'000	
d)	100'000'000'000'000'000	
e)	1	

4. Schreibe die Zahl als Produkt einer möglichst kleinen Zahl mit einer Zehnerpotenz.

Bsp.:	*1'230'000'000*	*$123 \bullet 10^{7}$* ***$= 1{,}23 \bullet 10^{9}$***
a)	25'987'000	
b)	268'000'000	
c)	23'400'000'000	
d)	763.5 Milliarden	
e)	79,26 Millionen	

5. Schreibe die Zahl ohne die Zehnerpotenzen

Bsp.:	*$35 \bullet 10^{6}$*	*$=35 \bullet 1'000'000 =$* ***35'000'000***
a)	$8 \bullet 10^{6}$	
b)	$98 \bullet 10^{7}$	
c)	$15 \bullet 10^{3}$	
d)	$1{,}23 \bullet 10^{5}$	
e)	$45 \bullet 10^{7}$	

6. Bestimme bei der nachfolgenden Zahl den Stellenwert und die Eigenwerte der einzelnen Ziffern:

		Eigenwert:	*Stellenwert:*
a)	15789		

7. Schreibe die Zahl als Summe mit Hilfe von Eigenwert und Stellenwert:

Bsp.:	*34135_{6}*	*$=3 \bullet 6^{4} + 4 \bullet 6^{3} + 1 \bullet 6^{2} + 3 \bullet 6^{1} + 5 \bullet 6^{0}$*
a)	*12232_{4}*	
b)	*175_{8}*	
c)	*11110010_{2}*	
d)	*2641645_{7}*	

8. Übersetze die folgenden Zahlen ins Zehnersystem:

Bsp.:	*510_{6}*	*$=5 \bullet 6^{2} + 1 \bullet 6^{1} + 0 \bullet 6^{0} = 5 \bullet 36 + 1 \bullet 6 + 0 = 180 + 6 = 186$*
a)	*232_{5}*	
b)	*1032_{4}*	
c)	*10010_{2}*	
d)	*120211_{3}*	

Nur mit Zusatzinfos lösbar
(Diese Aufgabentypen sind nicht Teil des Lehrmittels „Mathematik 1")

Nur mit Zusatzinfos lösbar
(Diese Aufgabentypen sind nicht Teil des Lehrmittels „Matmodmatik 1")

9. **Übersetze die folgenden Zahlen aus dem Zehnersystem in die entsprechenden Systeme: (Ausrechnungen unten!)**

Bsp.:	*591 ins 6er Sysetm*	*591 : 6 = 98*	*Rest 3*	
		98 : 6 = 16	*Rest 2*	***= 2423***$_6$
		16 : 6 = 2	*Rest 4*	
		2 : 6 = 0	*Rest 2*	

a) *453 ins 4er-System*

b) *1531 ins 8er - System*

c) *25 ins 2er-System*

d) *182 ins 3er-System*