Name:

Geometrie-Dossier

2 – Aussagen am rechtwinkligen Dreieck

(angepasst an das Lehrmittel Mathematik 2)

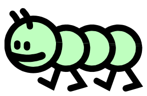
Inhalt:

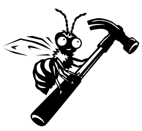
- **Der Satz von Thales**
- **Wer war Pythagoras?**
- **Der Satz des Pythagoras mit Beweisen**
- **Anwendung des Satz von Pythagoras in der Ebene**
- **Anwendung des Satz von Pythagoras im Raum**
- **Konstruktion von Strecken und Flächen in wahrer Grösse und Gestalt**

Online findest du dieses und andere Dossiers unter www.andiraez.ch/schule

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

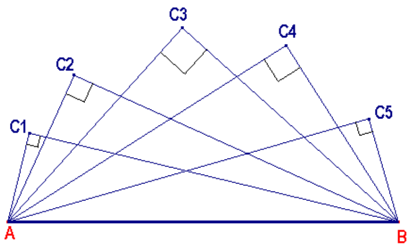
schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

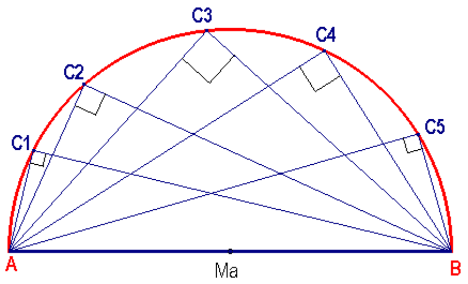
Die <u>Aufgaben müssen in der Freizeit</u> (oder in der Hausaufgabenstunde) <u>gelöst werden</u>. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Konstruktionen: *Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)*
Skizzen: Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.
Sichtbarkeit: In Raumbildern alle nicht sichtbare Kanten gestrichelt darstellen

1. Der Satz von Thales





Wenn wir zahlreiche rechtwinklige Dreiecke über der gleichen Strecke zeichnen und die Punkte C (beim rechten Winkel) betrachten, so können wir feststellen, dass diese Punkte alle auf einer Kreislinie liegen. Kreismittelpunkt ist dabei der Mittelpunkt der ursprünglichen Strecke (Hypotenuse) AB.

Der Satz von Thales lautet:
Liegt die Ecke C auf dem Halbkreis über der Strecke AB (Hypotenuse), ist das Dreieck ABC rechtwinklig. (→ Thaleskreis)

Anders ausgedrückt:

Bei rechtwinkligen Dreiecken bewegt sich die der längsten Seite gegenüberliegende Ecke auf einer Kreislinie über der längsten Seite. Diese Kreislinie heisst <u>Thaleskreis.</u>

1.1 Anwendungen des Satz von Thales

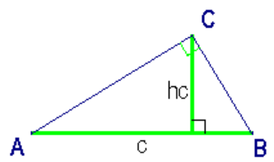
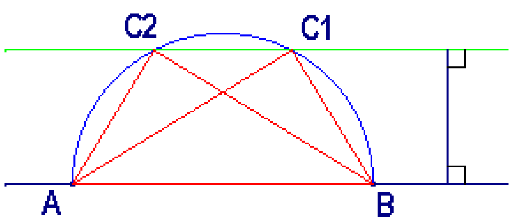
Der Satz von Thales spielt speziell in der Konstruktion und bei der Bestimmung von rechtwinkligen Dreiecken (z.B. beim Berechnen von Winkeln) eine wichtige Rolle.

1.1.1. Konstruktion:

Zusammen mit anderen Grundkonstruktionen ist der Thaleskreis eine wichtige Konstruktionshilfe für die Konstruktion von rechtwinkligen Dreiecken. Im Beispiel wird gezeigt, dass die Information „rechter Winkel“ zu einer Konstruktion des Thaleskreis führt.

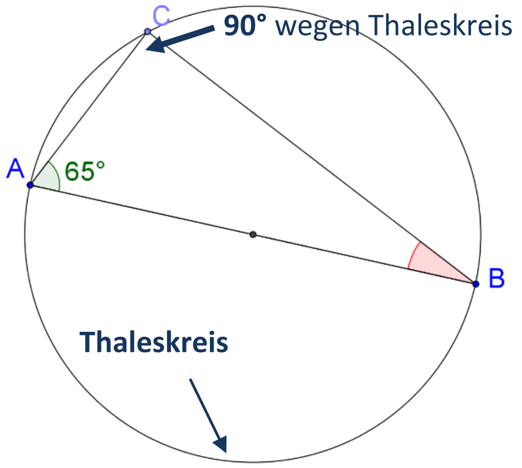
„Konstruiere das rechtwinklige Dreieck ABC ($\gamma = 90°$) mit $c = 45mm$, $h_c = 20mm$“

Wie jede Konstruktion beginnen wir mit der Skizze und erstellen danach einen Lösungsplan (Konstruktionsbericht).

<table>
<tr><td>Skizze:

</td><td rowspan="2">Konstruktionsbericht (Lösungsplan):
1. Seite c zeichnen
2. Höhenstreifen h_c zeichnen
(Weil h_c und c gegeben sind)
3. Thaleskreis über der Seite c
(Weil der rechte Winkel bei der Ecke C liegt und c längste Seite ist)
4. Die Schnittpunkte des Thaleskreis mit dem Höhenstreifen ergeben die beiden Punkte C_1 und C_2.
5. Dreiecke zeichnen.</td></tr>
<tr><td>Konstruktion:

</td></tr>
</table>

1.1.2. **Winkelberechnung**

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt bekanntlich 180°. Wenn wir erkennen können, dass bei einem Dreieck ein Thaleskreis eingezeichnet ist, dann können wir den einen rechten Winkel einzeichnen und wissen daher, dass die anderen zwei Winkel zusammen auch 90° betragen.



Die Analyse dieses Dreieckes zeigt, dass es einen Kreis gibt, der seinen Mittelpunkt in der Mitte der längsten Dreiecksseite hat. Zudem geht der Kreis durch alle drei Eckpunkte (→ Der Kreis ist also ein Thaleskreis, da sein Mittelpunkt auf der längsten Dreiecksseite liegt). Damit ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C. Entsprechend gilt:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$65° + \beta = 90° = 180°$

Somit $\boldsymbol{\beta}$ = 180° – 65° – 90° = **25°**

Aufgaben “Dreiecke“:

1. Konstruiere aus den folgenden Angaben die Dreiecke ABC:

a) $AB = 60mm$
$h_c = 25mm$
$\gamma = 90°$

Skizze / KB:

Konstruktion:

b) $AC = 54\ mm$
$h_a = 48\ mm$
$h_c = 28\ mm$

Skizze / KB:

Konstruktion:

c) $\beta = 60°$
$h_c = 45$ mm
$h_b = 47$ mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

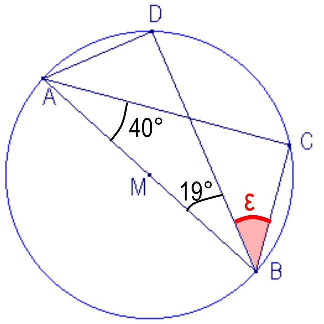
d) BC = 50mm
$h_a = 19$mm
$\alpha = 90°$

Skizze / KB:

Konstruktion:

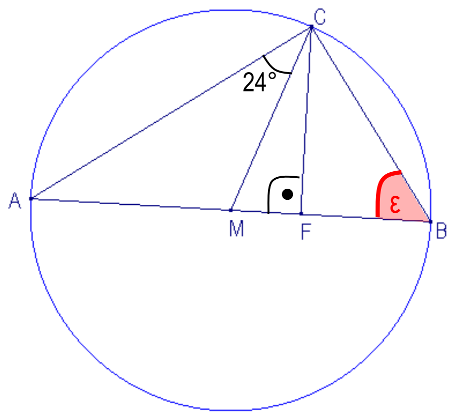
2. Berechne die gesuchten Winkel:

a)

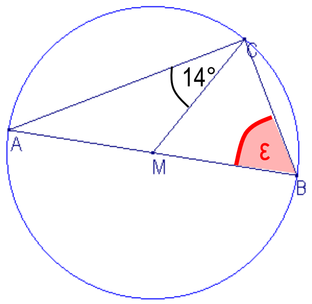


Berechne den Winkel ε.

b)

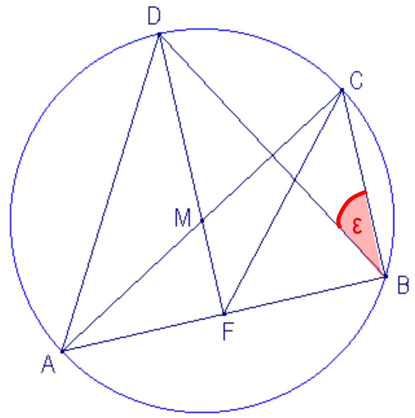


c)



Berechne den Winkel ε.

d)



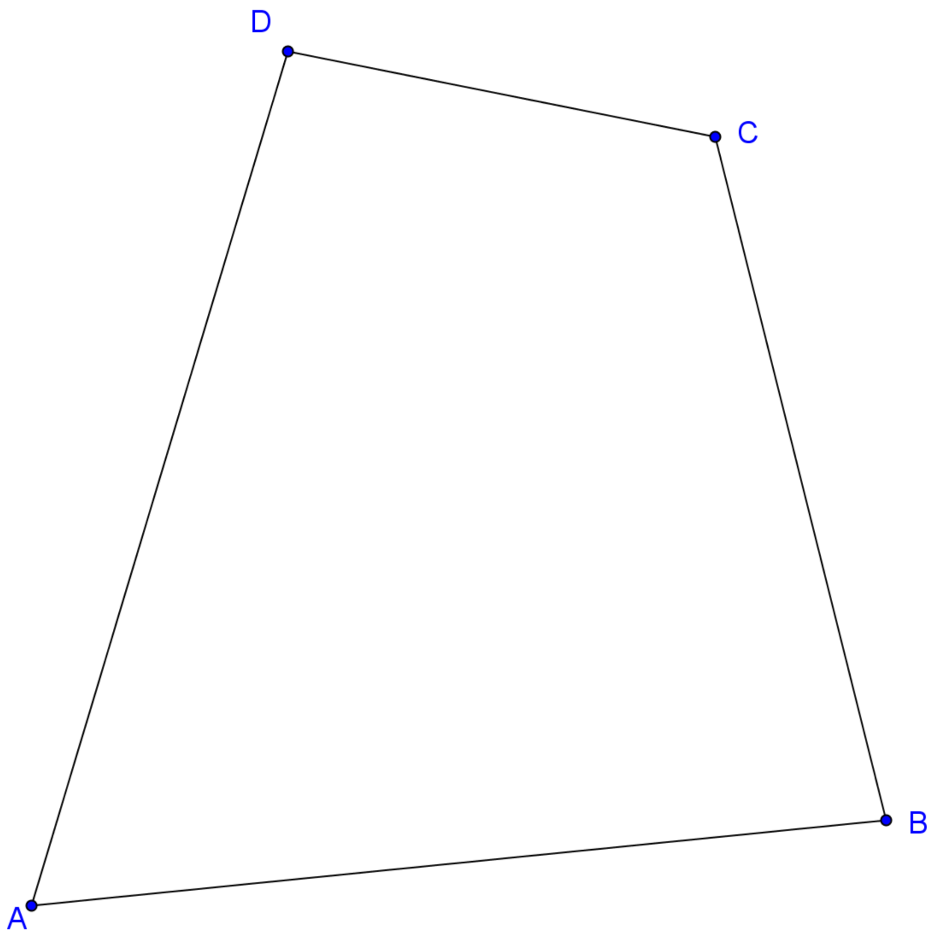
Berechne den Winkel ε.

3. Von welchem Punkt im Vieleck sieht man sowohl die Seite Seiten AB als auch die Seite BC ..

a) unter einem rechten Winkel → Färbe rot

b) unter einem stumpfen Winkel → Färbe blau

c) unter einem spitzen Winkel → Färbe grün



2. Wer war Pythagoras – Eine kurze Biographie

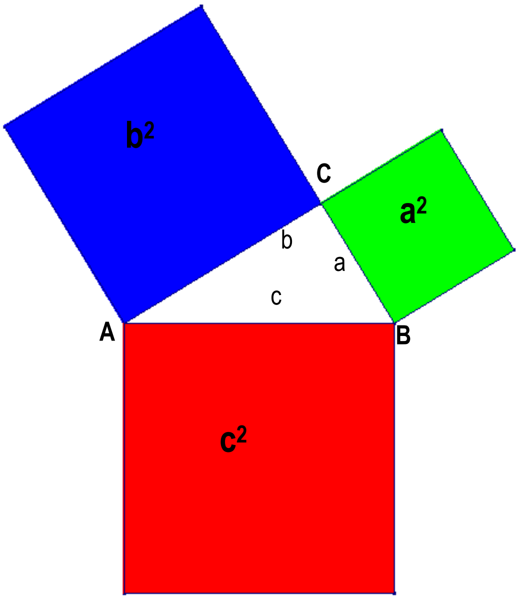

Encarta Enzyklopädie, Corbis/Archivo Iconografico, S.A.

Pythagoras ist uns heute als „Teil" der geometrischen Berechnung in Dreiecken ein Begriff. Doch Pythagoras war für viele Bereiche eine ganz wichtige Persönlichkeit, deren Einfluss und Ansehen zahlreiche Wissenschaftszweige beeinflusste und sogar förderte. Dazu ein (leicht gekürzter) Artikel aus „Microsoft Encarta":

„Pythagoras wurde in Samos (Griechenland) geboren. Vermutlich studierte er die Lehren der vorsokratischen Philosophen Thales, Anaximander, Pherekydes und Anaximenes. Danach unternahm er Reisen durch Ägypten und Babylonien. Angeblich soll seine Abneigung gegen den Tyrannen Polykrates den Philosophen 532 bzw. 531 v. Chr. aus Samos vertrieben haben. Um 530 v. Chr. ließ er sich in Kroton nieder, einer griechischen Kolonie im Süden Italiens. Hier gründete er die Schule der Pythagoreer, einen Kreis mit sittlich-religiösem, politischem und wissenschaftlichem Impuls. Er starb um 500 v. Chr. vermutlich in Metapont. Die Philosophie des Pythagoras existiert allein in den Nachschriften seiner Schüler, die ihn als absoluten Weisen verehrten. Vermutlich gehen auch viele ihrer Gedanken auf ihn zurück. Die Pythagoreer beschreiben den nach ihnen bzw. den nach ihrem Lehrer, Pythagoras von Samos, benannten Lehrsatz. Ihre Erkenntnis war allerdings verschiedenen Quellen zufolge schon den Babyloniern – 1 000 Jahre vor Pythagoras – bekannt.
*Ausgehend von Pythagoras glaubten die Pythagoreer an eine Reihe von Mysterien. So gingen sie von der Unsterblichkeit und Wiedergeburt der menschlichen Seele aus – ein Gedanke, der später etwa von Platon wieder aufgegriffen wurde. Darüber hinaus beschäftigte sich der Kreis der Pythagoreer verstärkt mit mathematischen Fragen. So unterstrichen sie etwa die mathematische Ordnung der (göttlich geschaffenen) Welt. Für ihre Zahlentheorie wurde das Verhältnis der geraden zu den ungeraden Werten sowie die Bedeutung von Quadrat- und Primzahlen zentral. Von diesem arithmetischen Standpunkt aus entwickelten sie ein Zahlenmodell, das sie als letztes Prinzip der Proportionen, der Ordnung und der Harmonie des Universums ansahen. Durch ihre Studien schufen sie die **Basis der Mathematik**. In der **Astronomie** waren die Pythagoreer die Ersten, die die Erde als Kugel betrachteten und die harmonische Ordnung der Himmelskörper mit Hilfe ihrer Zahlenlehre zu erklären suchten. Überdies meinten sie, die Planeten und Sterne seien durch Intervalle voneinander getrennt, die den harmonischen Klängen von Saiten entsprächen. Die Bewegung der Planeten erzeuge dann die so genannte **Sphärenmusik**."*

3. Der Satz des Pythagoras mit Beweisen

Zuerst einmal, um alles andere vorweg zu nehmen, möchte ich den „berühmten" Satz des Pythagoras an den Anfang dieses Kapitels stellen:



In rechtwinkligen Dreiecken ist der <u>Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate</u>.

Wie in der Zeichnung ersichtlich ist das Dreieck angeschrieben und zwar so, dass c die Hypotenuse, a und b die Katheten sind. Entsprechend bedeutet der Satz von Pythagoras in unserem Beispiel, dass

$$a^2 + b^2 = c^2$$

a^2		b^2		c^2
Quadrat über der Kathete a	+	Quadrat über der Kathete b	=	Quadrat über der Hypotenuse c

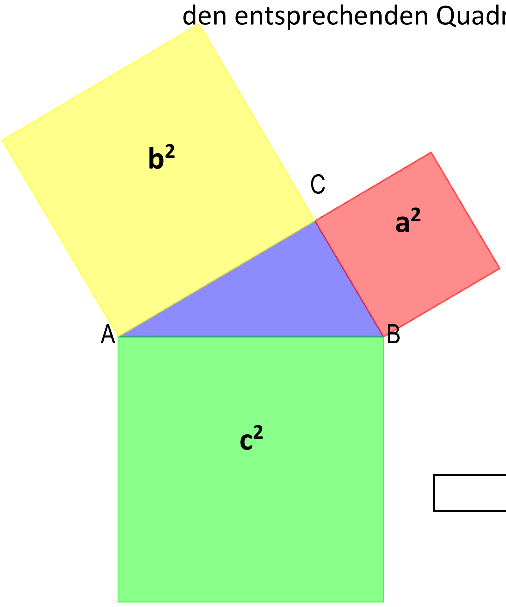
<u>Zur Erinnerung:</u>

Hypotenuse: Die <u>dem rechten Winkel gegenüberliegende (längste) Seite</u> eines rechtwinkligen Dreiecks.

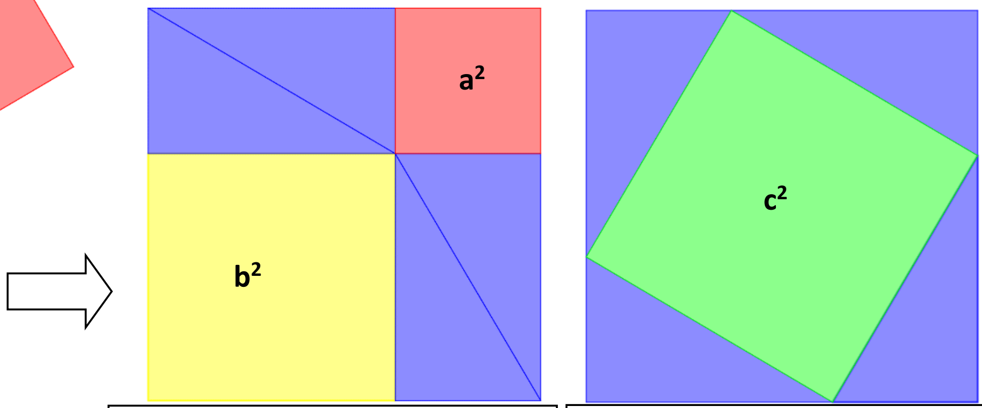
Kathete(n): Die beiden <u>dem rechten Winkel anliegenden (kürzeren) Seiten</u> im rechtwinkligen Dreieck.

3.1 Ein erster Beweis für den Satz von Pythagoras:

Der erste Beweis für den Satz von Pythagoras verläuft über eine geometrische Flächenbelegung. Ausgehen wollen wir von der „normalen“ Pythagoras – Figur mit einem rechtwinkligen Dreieck und den entsprechenden Quadraten über den Katheten und über der Hypotenuse.



Auf die folgende Weise zeigen wir jetzt, dass wir aus den beiden Kathetenquadraten, sowie dem Hypotenusenquadrat jeweils gleich grosse Figuren legen können. Dies sieht dann so aus:



Dieses Quadrat besteht aus **vier gleichen rechtwinkligen Drei-ecken** und den **beiden Katheten-quadraten**.

Dieses Quadrat besteht aus **vier gleichen rechtwinkligen Drei-ecken** und dem **Hypotenusen-quadrat .**

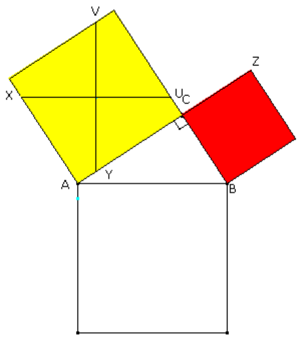
Da sich also gleiche Flächen einerseits aus vier blauen Dreiecken und den Kathetenquadraten, sowie vier gleichen blauen Dreiecken und dem Hypotenusenquadrat legen lassen, **bedeutet das, dass das grüne Hypotenusenquadrat und die beiden Kathetenquadraten (rot und gelb) gleiche Flächen belegen.**

Darum also muss also auch hier gelten: $a^2 + b^2 = c^2$ *(q.e.d.)*

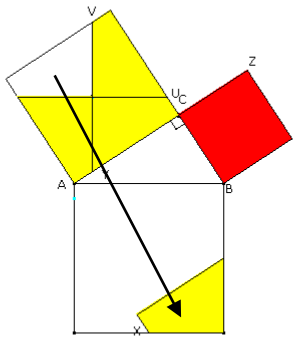
(q.e.d. bedeutet: „Quod Erat Demonstrandum“, was lateinisch ist und bedeutet: „Was zu beweisen war“).

3.2 Ein zweiter Beweis für den Satz von Pythagoras:

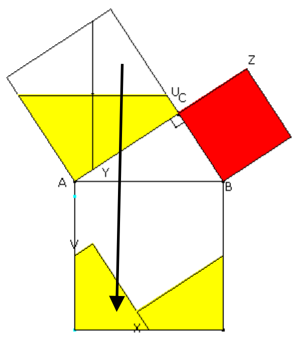
Der zweite Beweis für den Satz von Pythagoras verläuft ebenfalls über eine geometrische Flächenbelegung. In diesem Fall aber zeigen wir, dass wir die rote und die gelbe Fläche (also a^2 und b^2) direkt in die grüne Fläche (c^2) überführen können.



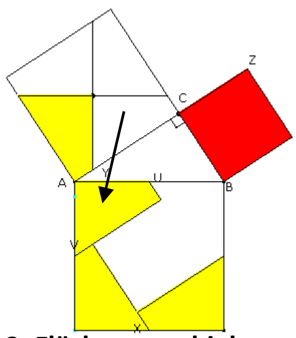
Ausgangslage



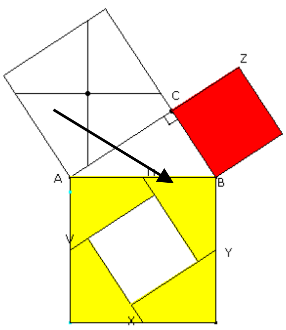
1. Flächenverschiebung



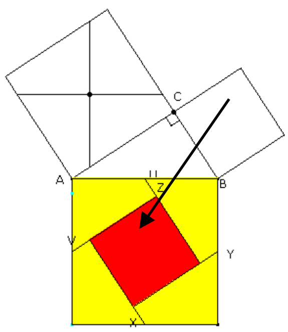
2. Flächenverschiebung



3. Flächenverschiebung



4. Flächenverschiebung



5. Flächenverschiebung

Wir können also den **Flächeninhalt von den beiden Kathetenquadraten** a^2 und b^2 **vollständig in die Fläche des Hypotenusenquadrates überführen**.

Es gilt also (einmal mehr): $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

4. Berechnungen mit dem Satz von Pythagoras in der Ebene

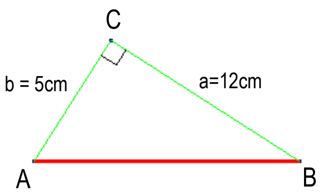
Der Satz von Pythagoras gilt also in rechtwinkligen Dreiecken. Das bedeutet, dass wir ***in jedem rechtwinkligen Dreieck aus zwei bekannten Seitenlängen die dritte Seitenlänge berechnen können***.

4.1 Formeln:

Die Formeln sind sinnvollerweise mit den Namen Hypotenuse und Kathete zu lernen, denn dann ist man unabhängig davon, wie ein Dreieck angeschrieben ist. Daneben stehen die „normalen" Formeln mit a, b, c, wobei c in diesem Fall die Hypotenuse darstellt.

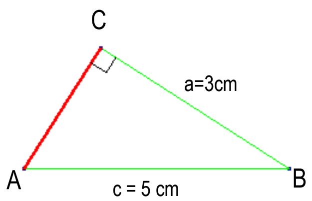
Hypotenuse^2	**= (kurze Kathete)^2 + (lange Kathete)^2**	*(Grundformel, $c^2 = a^2 + b^2$)*
(kurze Kathete)^2	**= Hypotenuse^2 - (lange Kathete)^2**	*(abgel. Formel, $b^2 = c^2 - a^2$)*
(lange Kathete)^2	**= Hypotenuse^2 - (kurze Kathete)^2**	*(abgel. Formel, $a^2 = c^2 - b^2$)*

Berechnung der Hypotenuse (hier c):



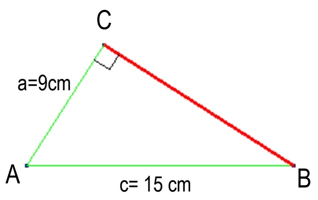
<u>Gegeben:</u>	Katheten a und b
<u>Gesucht:</u>	Hypotenuse c
<u>Wortformel:</u>	**Hypotenuse^2 = (kurze Kathete)^2 + (lange Kathete)^2**
<u>Formel:</u>	$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$ **also** $\mathbf{c=\sqrt{a^2+b^2}}$
<u>Berechnung:</u>	$c=\sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169}$ = <u>**13 cm**</u>

Berechnung der kurzen Kathete (hier b):



<u>Gegeben:</u>	Kathete a und Hypotenuse c
<u>Gesucht:</u>	Kathete b
<u>Wortformel:</u>	**(kurze Kathete)^2 = Hypotenuse^2 - (lange Kathete)^2**
<u>Formel:</u>	$\mathbf{b^2 = c^2 - a^2}$ **also** $\mathbf{b=\sqrt{c^2 - a^2}}$
<u>Berechnung:</u>	$b=\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} =\sqrt{16}$ = <u>**4 cm**</u>

Berechnung der langen Kathete (hier a):



<u>Gegeben:</u>	Kathete b und Hypotenuse c
<u>Gesucht:</u>	Kathete a
<u>Wortformel:</u>	**(lange Kathete)^2 = Hypotenuse^2 - (kurze Kathete)^2**
<u>Formel:</u>	$\mathbf{a^2 = c^2 - b^2}$ **also** $\mathbf{a=\sqrt{c^2 - b^2}}$
<u>Berechnung:</u>	$a=\sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} =\sqrt{144}$ = <u>**12 cm**</u>

4.2 Zahlentrippel:

In all diesen Beispielen ist die Rechnung ganzzahlig aufgegangen. **Natürlich gibt es unzählige Beispiele, wo das Ergebnis eine Zahl mit zahlreichen Kommastellen ergibt. Vielfach lässt man es dann auch als Wurzelterm stehen.**

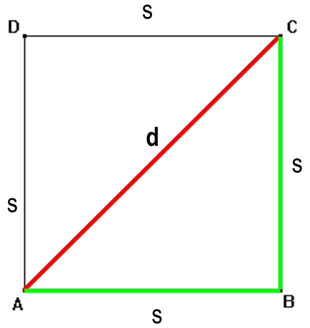
Wenn – wie in unseren Beispielen – die Summe aus zwei Quadraten von zwei ganzen Zahlen gerade wieder ein Quadrat einer ganzzahligen Zahl ergibt, spricht man von „pythagoräischen Zahlentrippeln". Natürlich gelten auch alle Vielfachen der Trippel wiederum als Trippel (Grundtrippel 3 – 4 – 5 und die „Vielfachentrippel" wie 6 – 8 – 10 und 9 – 12 – 15 usw.)

Einige Zahlentrippel (Grundtrippel): (davon gibt Tausende, darum nur einige wenige Beispiele):

3	4	5	5	12	13	8	15	17	7	24	25
20	21	29	9	40	41	12	35	37	11	60	61

4.3 Anwendungen des Satz von Pythagoras in der Ebene:

4.3.1. Die Diagonale im Quadrat



Wir stellen fest, dass es sich bei einem Quadrat um zwei zusammengesetzte rechtwinklige Dreiecke handelt. **Das Stichwort „rechtwinkliges Dreieck" muss in unserem Kopf sofort den Link zum Satz von Pythagoras erzeugen.**

Im rechtwinkligen Dreieck ABC bildet die Quadrat-Diagonale d gerade die Hypotenuse. Somit gilt:

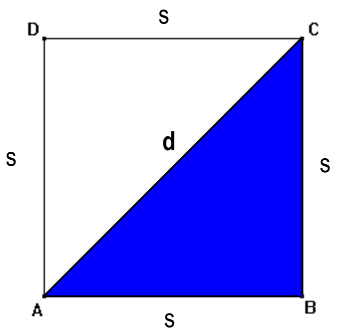
Hypotenuse² = (kurze Kathete)² + (lange Kathete)²

übersetzt mit den entsprechenden Seitenbeschriftungen heisst dies hier:

***Pythagoras heisst: Suche nach rechtwinkligen Dreiecken** (hier sind sie farblich hervorgehoben)*

$\mathbf{d^2 = s^2 + s^2}$ also

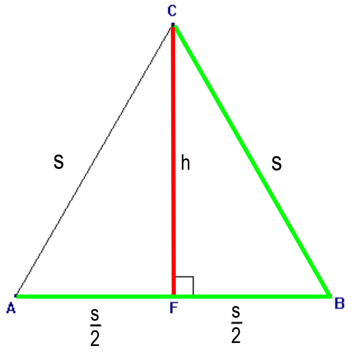
$\mathbf{d} = \sqrt{s^2+s^2} = \sqrt{2s^2} = \sqrt{2} \bullet \sqrt{s^2} = \sqrt{2} \bullet s = \mathbf{s\sqrt{2}}$



Es gilt also: Die Diagonale im Quadrat ist gerade $\sqrt{2}$ mal länger als die Quadratseite.

$\mathbf{d = s\sqrt{2}}$ **und entsprechend** $\mathbf{s = \dfrac{d}{\sqrt{2}}}$

4.3.2. Die Höhe im gleichseitigen Dreieck



Wir stellen fest, dass bei einem gleichseitigen Dreieck die Höhe gerade durch den Mittelpunkt der Basis geht. Somit teilt die Höhe das Dreieck in zwei gleiche, rechtwinklige Dreiecke, deren kurze Kathete gerade die Hälfte der Hypotenuse ausmacht. Die Höhe h bildet in diesem rechtwinkligen Dreieck die längere Kathete. Somit gilt:

(lange Kathete)^2 = Hypotenuse^2 - (kurze Kathete)^2

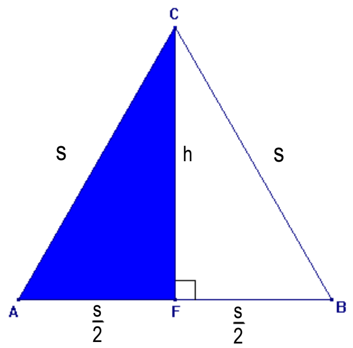
übersetzt mit den entsprechenden Seitenbeschriftungen heisst dies hier:

$\mathbf{h^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$ also

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{4s^2}{4} - \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{\sqrt{3s^2}}{\sqrt{4}}$$

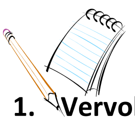
$$= \frac{\sqrt{3} \bullet \sqrt{s^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3} \bullet s}{2} = \frac{s\sqrt{3}}{2}$$

Pythagoras heisst: Suche nach rechtwinkligen Dreiecken (hier sind sie farblich hervorgehoben)

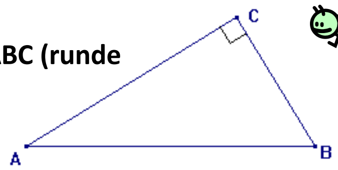


Es gilt also: Die Höhe im gleichseitigen Dreieck ist gerade $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mal länger als die Dreiecksseite.

$\boxed{h = \frac{s\sqrt{3}}{2}}$ **und entsprechend** $\boxed{s = \frac{2h}{\sqrt{3}}}$



Berechnungen mit Pythagoras in der Ebene:

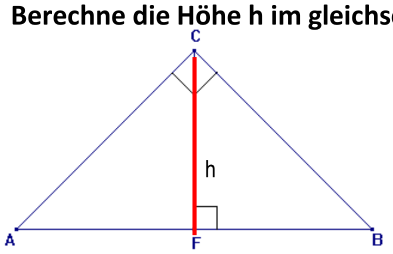


1. Vervollständige die untenstehende Tabelle für das rechtwinklige Dreieck ABC (runde auf 2 Stellen nach dem Komma oder lasse Wurzelterme stehen)

	a=	b=	c=
a)	15 cm	6 cm	
b)	148 cm		821 cm
c)		15 cm	19.5 cm
d)	16 cm	2.25 cm	

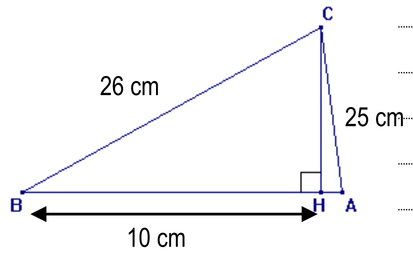
	a=	b=	c=
e)	13 cm	2 cm	
f)	23 cm	15.5 cm	
g)		13.58 cm	15.16 cm
h)	19.5 cm		59 cm

2. Berechne die Höhe h im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC.

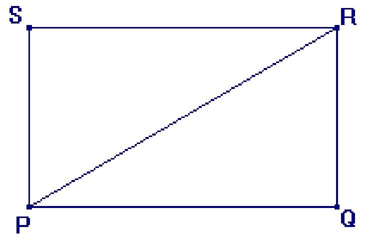


AB = 16 cm BC = 11.31cm

3. Berechne den Umfang und die Fläche des gegebenen Dreiecks.



4. Berechne im Rechteck PQRS die fehlende Grösse:

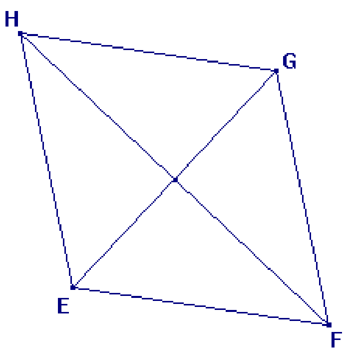


	PQ	QR	PR
a)	12	21	
b)		56	91
c)	1.25		9.55
d)	6x	8x	

5. Berechne im gleichschenkligen Dreieck die Basishöhe, wenn ein Schenkel 28 cm und die Basis 48 cm misst..

Skizze:

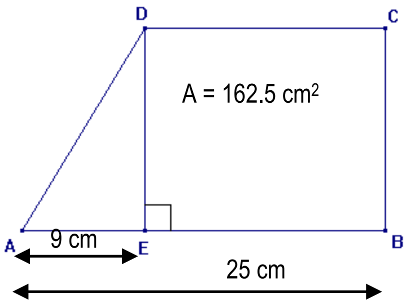
6. Im Rhombus EFGH kennst du die Länge der Seite (s= 22cm) und die Länge der Diagonale EG (EG = 32cm). Berechne die Länge der Diagonale FH sowie den Flächeninhalt des Rhombus.



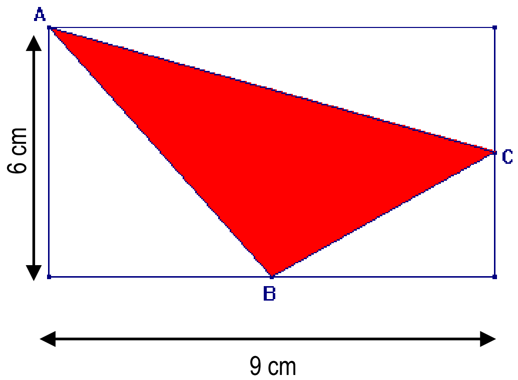
7. Berechne im Rhomboid ABCD (mit Diagonalenschnittpunkt M) die Länge der Strecke DM, wenn AB = 26cm, AM = 22cm und die Fläche 832 cm² beträgt.

Skizze:

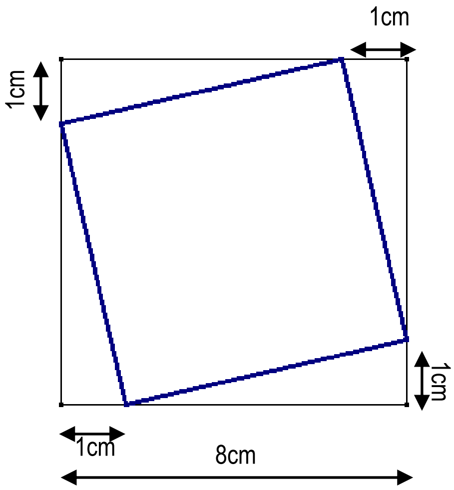
8. Berechne im rechtwinkligen Trapez ABCD die Längen der Strecken DC, AD sowie DE.



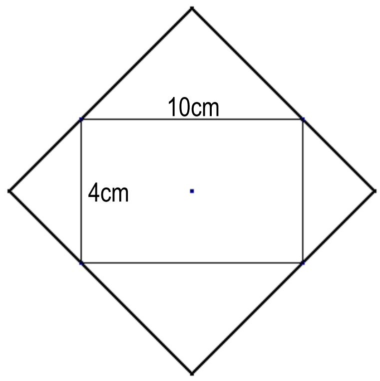
9. Berechne den Inhalt der rot markierten Fläche (B und C sind Seitenmittelpunkte)



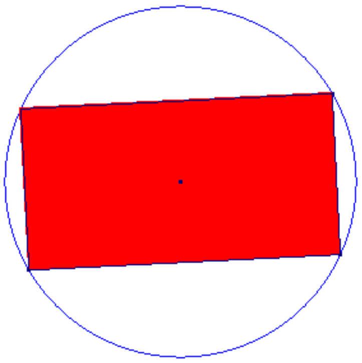
10. In eine Quadrat mit Seitenlänge 8cm wird ein kleineres Quadrat eingeschrieben (siehe Skizze). Berechne den Flächeninhalt des kleinen Quadrates.



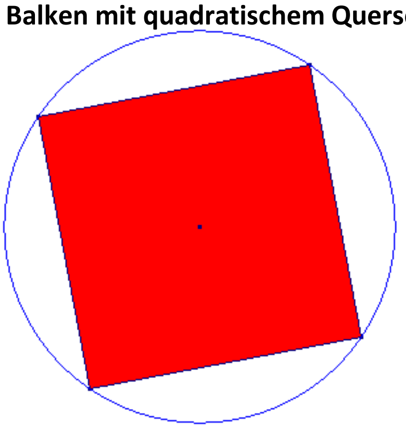
11. Einem Quadrat ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 10cm und 4cm eingeschrieben. Berechne den Flächeninhalt des umschriebenen Quadrates



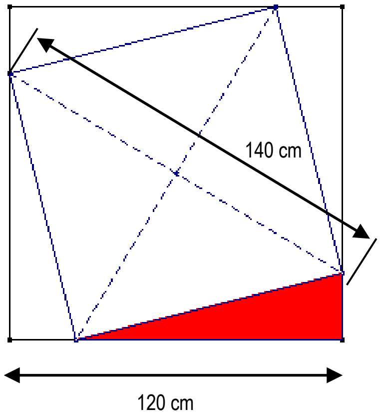
12. Welchen Durchmesser muss der Baumstamm (hier als Kreis dargestellt) mindestens haben, damit man einen Balken mit einem rechteckigen Querschnitt (16 x 26 cm) daraus aussägen kann?



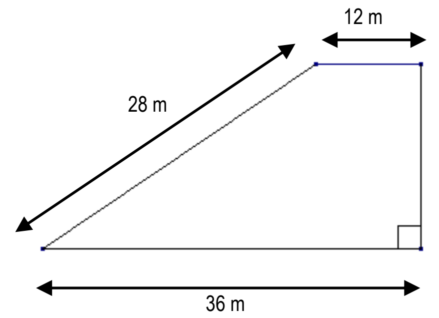
13. Welchen Durchmesser muss der Baumstamm (hier als Kreis dargestellt) mindestens haben, damit man einen Balken mit quadratischem Querschnitt (Kantenlänge 8cm) aussägen kann?



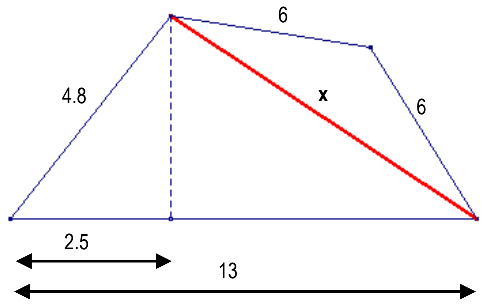
14. Einem Quadrat mit Seitenlänge 120 cm ist ein kleineres Quadrat eingeschrieben (siehe Skizze). Berechne den Flächeninhalt der rot markierten Fläche.



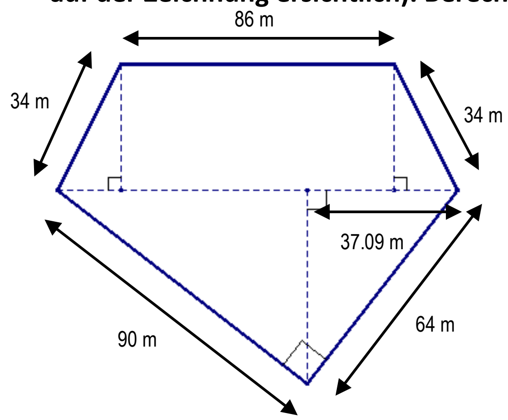
15. Berechne Fläche und Umfang des abgebildeten Trapezes.



16. Berechne die Länge der Strecke x.



17. Eine Grundstückfläche besteht aus einem gleichschenkligen Trapez und einem rechtwinkligen Dreieck (wie auf der Zeichnung ersichtlich). Berechne den Flächeninhalt des ganzen Grundstückes.



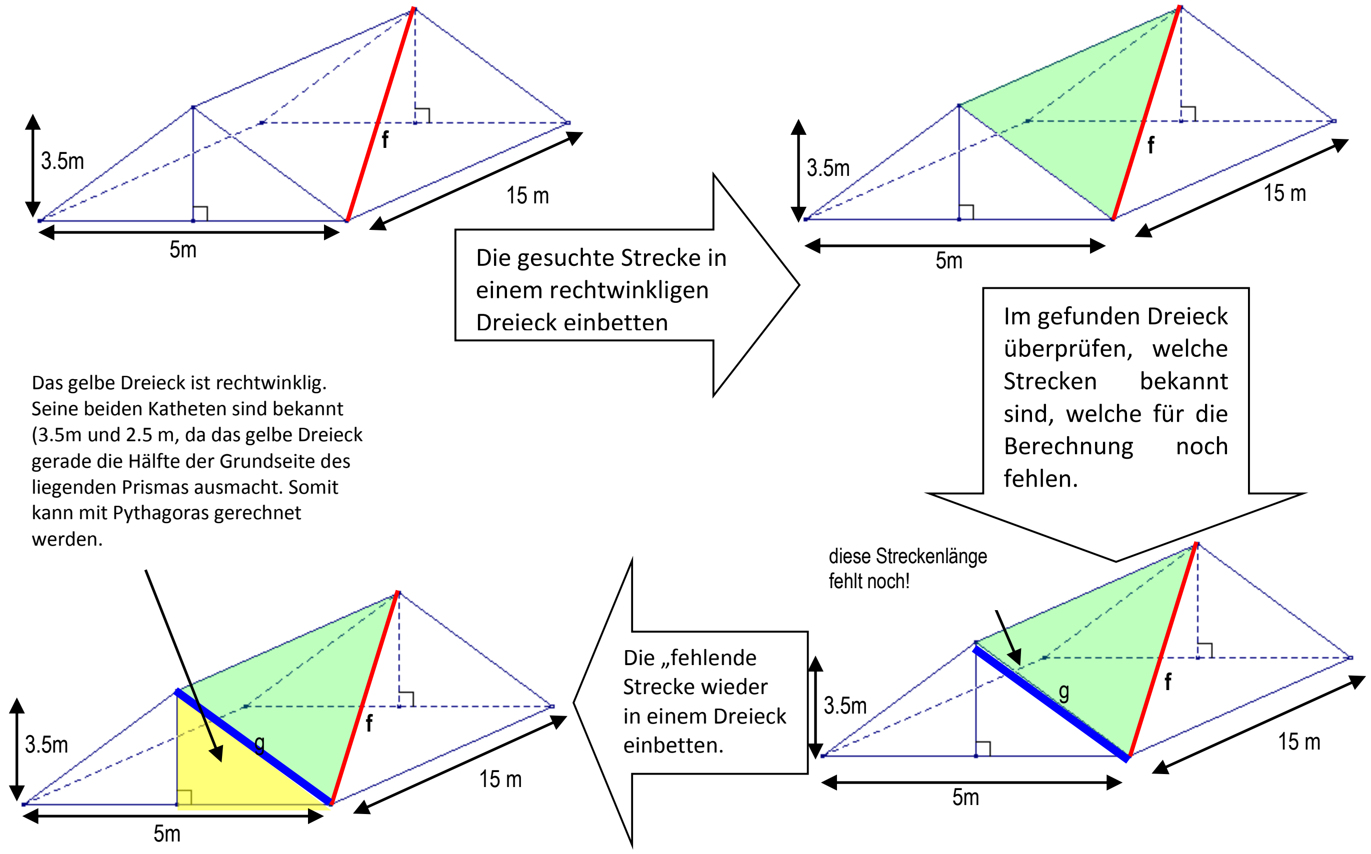
5. Berechnungen mit dem Satz von Pythagoras im Raum

Der Satz von Pythagoras gilt in rechtwinkligen Dreiecken. **Das bedeutet, dass wir *in jedem rechtwinkligen Dreieck aus zwei bekannten Seitenlängen die dritte Seitenlänge berechnen können***. Dies haben wir ja schon im Kapitel zuvor festgestellt. Im Raum gilt aber genau das Gleiche:

Wir müssen auch im Raum auf die Suche nach rechtwinkligen Dreiecken gehen, damit wir dann in diesen Dreiecken den Satz von Pythagoras anwenden können. Zum Teil brauchen wir auf dem Weg zur Lösung einige Zwischenschritte. Doch Schritt für Schritt kommen wir in verschiedenen rechtwinkligen Dreiecken zum Ziel.

<u>Musteraufgabe:</u>

Berechne die Länge der Strecke f im dreiseitigen, geraden Prisma



➔ <u>Wir rechnen jetzt der Reihe nach:</u>

1. Die blaue Strecke g ist im gelben Dreieck Hypotenuse. Die Berechnung lautet somit:

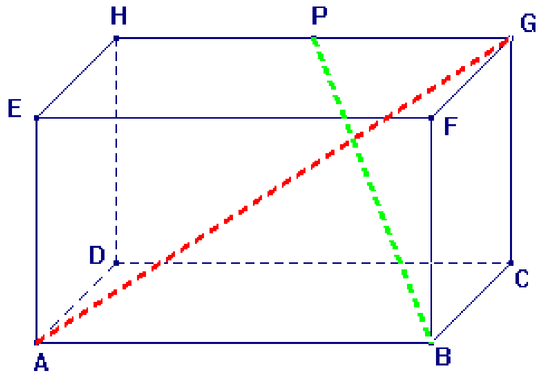
   $g=\sqrt{2.5^2+3.5^2} = \sqrt{6.25+12.25} = \sqrt{18.5}$ (nicht weiter ausrechnen!)

5. Jetzt wechseln wir ins grüne Dreieck, dort ist g Kathete und die gesuchte Strecke f ist Hypotenuse.
   Es gilt also:

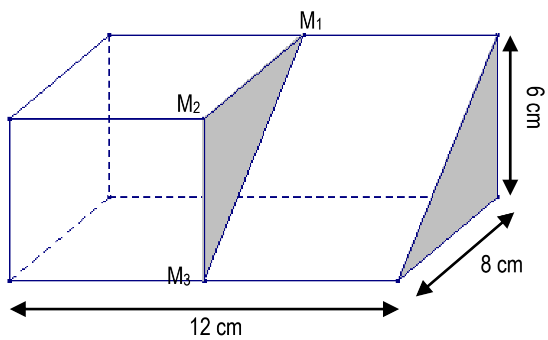
   $\mathbf{f} = \sqrt{15^2+g^2} = \sqrt{15^2+(\sqrt{18.5})^2} = \sqrt{225+18.5} = \sqrt{\mathbf{243.5}} = 15.60448653 \approx \mathbf{15.61\ m}$

Berechnungen mit Pythagoras im Raum

1. **Berechne die Länge der Körperdiagonale AG sowie die Länge der Strecke PB (P: Kantenmittelpunkt) in einem Quader mit den Seitenlängen.**
   a) **AB= 12cm, BC = 9 cm, CG = 8cm**
   b) **AB= 16cm, BC = 5 cm, CG =7cm**

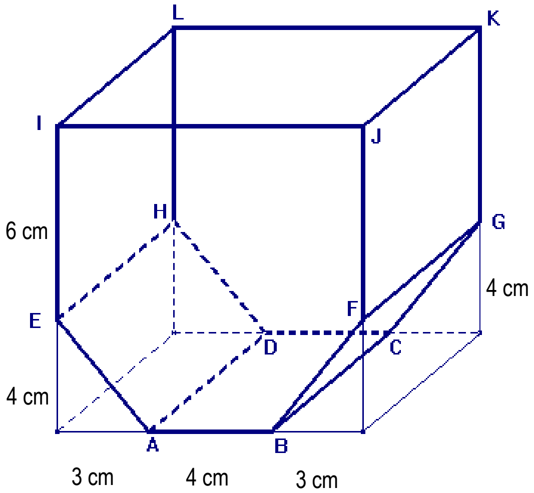


2. **Die Punkte M_1, M_2 und M_3 sind Kantenmittelpunkte.**
   a) **Berechne das Volumen des hier abgebildeten Körpers**
   b) **Berechne die Oberfläche des Körpers**

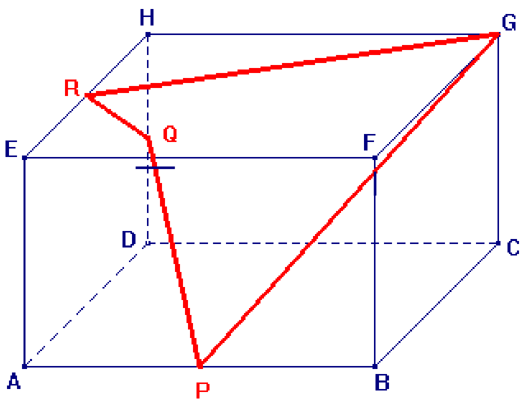


3. **In einem Würfel von 10 cm Kantenlänge wurden durch zwei Schnitte (jeweils parallel zur Kante JK) zwei gleiche, dreiseitige Prismen weg geschnitten. Der abgebildete Körper ABCDEFGHIJKL ist dabei übrig geblieben.**

   a) **Berechne die Oberfläche dieses Körpers**
   b) **Berechne die Länge der Strecke DJ (gerundet auf 2 Kommastellen)**
   c) **Zeichne die Schnittfläche ein, die entsteht, wenn man durch den Mittelpunkt von IL sowie den Punkt A und den Punkt K eine Schnittebene legt.**



4. **Berechne die Länge des Streckenzuges PGRQP (runde auf 2 Kommastellen). Beachte dabei, dass P, Q und R Kantenmittelpunkte sind, zudem messen die Kantenlängen des Quaders 12cm (AB), 8cm (BC) und 6cm (CG).**



Zusatzinformation
(In diesem Kapitel nicht im Lehrmittel enthalten)

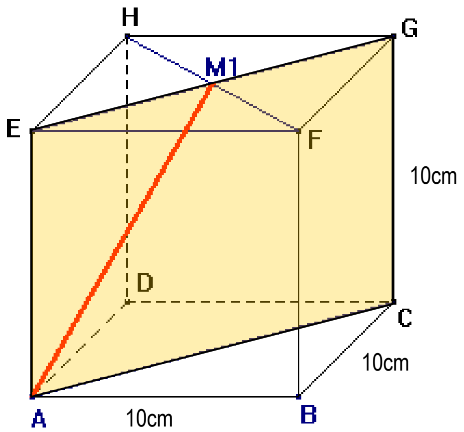
6. Berechnung und Konstruktionen von Strecken und Flächen in wahrer Form und Grösse

Wie schon im ersten Geometrie-Jahr (und im Kapitel Würfel und Quader) geht es bei diesem Problem wiederum darum, eine im Raumbild verzerrte Strecke oder Fläche in wahrer Form und Grösse zu konstruieren. Zusätzlich kommt jetzt aber noch die Komponente der Berechnung dieser Strecken und Flächen vor.

Einmal mehr machen wir uns dabei auf die Suche nach (rechtwinkligen) Dreiecken, worin wir die entsprechenden Strecken einbetten. Nun kann mit Pythagoras berechnet und danach die gefundenen Dreiecke konstruiert werden. Und „schwupps“ liegen auch die gesuchten Strecken in wahrer Grösse vor.

Beispiel:

a) Berechne den Flächeninhalt der Diagonalfläche ACGE (auf zwei Kommastellen gerundet)
b) Berechne die Länge der rot markierten Strecke im Würfel
c) Konstruiere die Fläche ACGE und die Strecke AM in wahrer Form und Grösse



a) Flächeninhalt von ACGE:
Fläche = Länge • Breite = EG • CG.

➔ *EG fehlt uns noch, im rechtwinkligen Dreieck EFG kann diese Strecke aber mit Pythagoras berechnet werden.*

→ $EG = \sqrt{10^2+10^2} = \sqrt{100+100} = \sqrt{200} = 14.14213562$ cm

Somit ist die **Fläche =** 14.14213562 • 10 = **141.42 cm²**

Achtung: Runden erst ganz zum Schluss!!!!

b) Länge der Strecke AM1:
Die Strecke AM1 befindet sich im rechtwinkligen Dreieck AEM1.
Dieses hat die beiden Kathetenlängen AE = 10cm und EM1 = $\frac{\sqrt{200}}{2}$

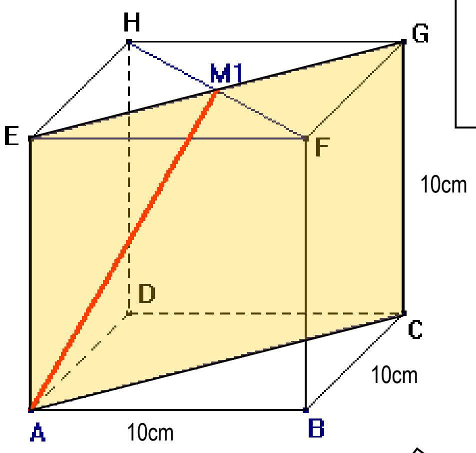
Entsprechend berechnet sich dies mit Pythagoras:

$$\mathbf{AM1} = \sqrt{10^2+\left(\frac{\sqrt{200}}{2}\right)^2} = \sqrt{100+\frac{200}{4}} = \sqrt{100+50} = \sqrt{150} = \mathbf{12.25\ cm}$$

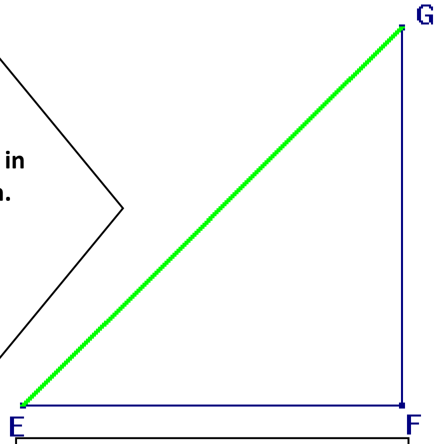
Fragen / Bemerkungen:

Zusatzinformation
(In diesem Kapitel nicht im Lehrmittel enthalten)

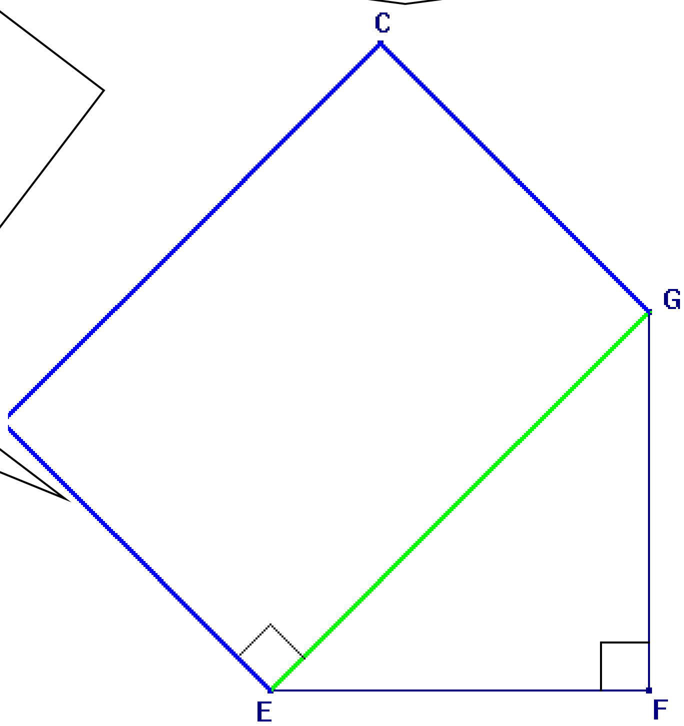
c) **Konstruktion der Fläche und der Strecke in wahrer Form und Grösse (hier aus Platzgründen im Massstab 1:2)**



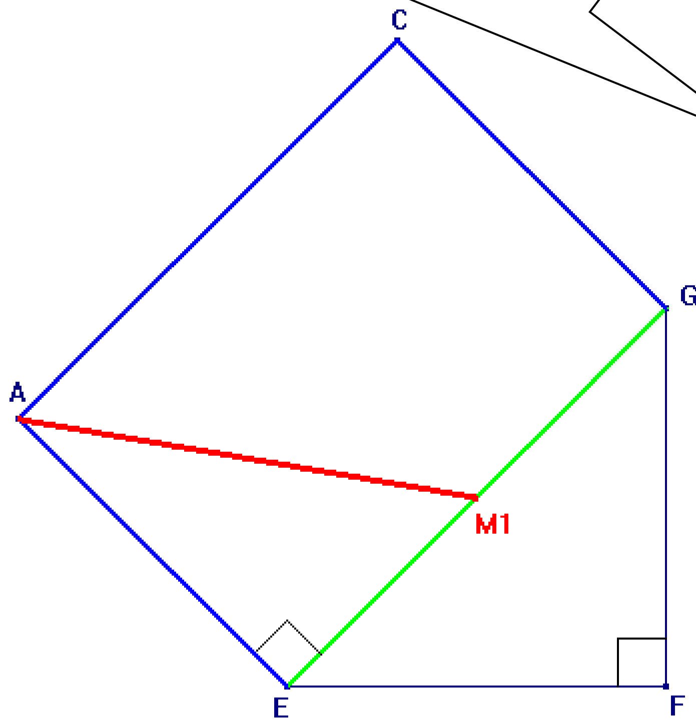
1. **Das rechtwinklige Dreieck EFG in wahrer Grösse herauszeichnen.**
(EF = 10cm, FG = 10cm)



2. **Die Fläche ACEG ist ein Rechteck. Sie hat also rechte Winkel. Diese werden jetzt eingezeichnet** (Senkrechte zu EG!!). Danach messen wir die Kantenlänge AE = 10cm ab und können die Fläche ACEG vollständig einzeichnen.



3. Die Strecke AM1 verläuft vom Punkt M1 aus. Dieser ist der Mittelpunkt von EG. Also können wir ihn konstruieren und einzeichnen. Danach müssen wir diesen Punkt nur noch mit A verbinden und schon haben wir AM1 in wahrer Grösse.

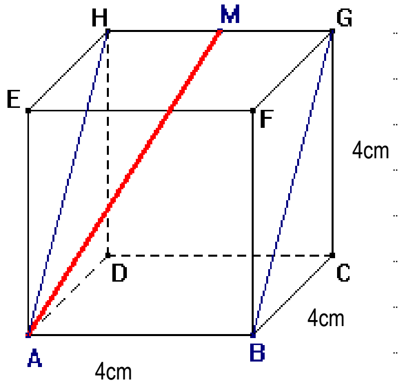


Wichtiger Tipp:

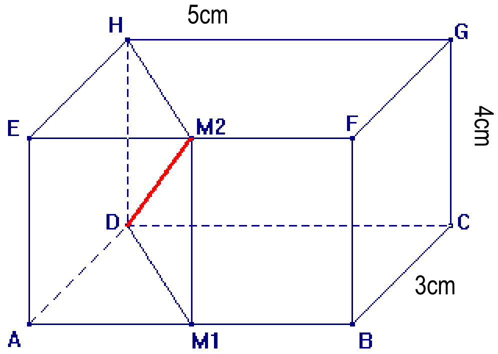
Die Konstruktion folgt also genau dem Berechnungsweg. Wir brauchen die genau gleichen rechtwinkligen Dreiecke, in denen wir Pythagoras anwenden und zeichnen sie Schritt für Schritt auf.
(Die Konstruktion wird verschachtelt, weil wir, sobald eine Strecke konstruiert ist, diese gleich für die nächste Konstruktion verwenden!)

Berechnung/Konstruktion von Strecken und Flächen in wahrer Form und Grösse.

1. **Berechne den Flächeninhalt der Fläche ABGH und die Länge der Strecke AM. Konstruiere danach die Fläche ABGH und die Strecke AM in wahrer Form und Grösse.**



2. **Berechne den Flächeninhalt der Fläche DHM_1M_2 und die Länge der Strecke DM_2. Konstruiere danach die Fläche DHM_1M_2 und die Strecke DM_2 in wahrer Form und Grösse. (Konstruktion auf nächster Seite!)** 



3. Berechne die Länge der Strecke M1M2 und konstruiere sie in wahrer Grösse (AB=4cm, BC=3cm, CG=2cm).