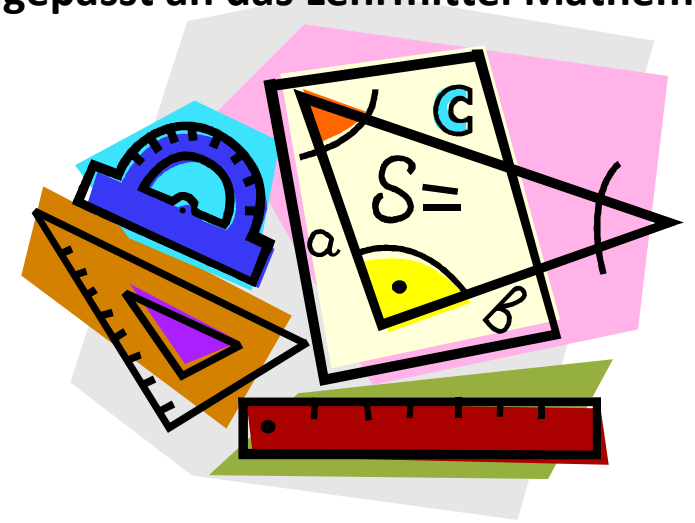
Name:

Geometrie-Dossier

2 – Ähnlichkeit

(angepasst an das Lehrmittel Mathematik 3)



Inhalt:

- **Die (zentrische) Streckung**
- **Aufgaben zur Zentrischen Streckung**
- **Ähnlichkeit von Figuren**
- **Die beiden Strahlensätze (1. und 2. Strahlensatz)**
- **Lösen von Aufgaben mit Hilfe der Ähnlichkeit und den Strahlensätzen**

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem *gekennzeichnet.*

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Beachten:	*Konstruktionen:*	*Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)*
	Skizzen:	*Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.*
	Sichtbarkeit:	*In Raumbildern alle nicht sichtbare Kanten gestrichelt darstellen.*

1. Bekannte Abbildungen und ihre Eigenschaften

Die besondere Leistung von Abbildungen ist es ja bekanntlich, eine Originalfigur in eine Bildfigur zu überführen. Dies natürlich nach gewissen Regeln. Wir haben bereits einige solcher Abbildungen kennengelernt:

- Geradenspiegelung
- Drehung (Drehspiegelung)
- Punktspiegelung

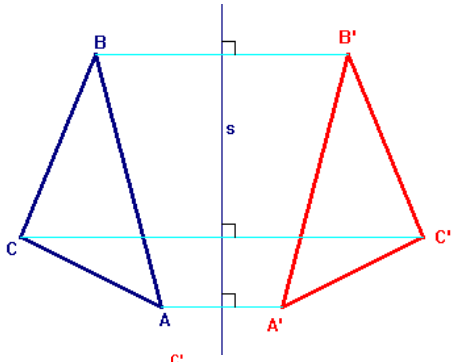
Jede dieser Abbildungen hat eigene Gesetzmässigkeiten, doch ihnen allen sind gewisse Eigenschaften gemeinsam, denn alle drei Abbildungen sind

- **winkeltreu** (Winkel werden in gleich grosse Winkel abgebildet, also „winkelerhaltend“)
- **geradentreu** (Geraden werden in Geraden abgebildet, also nicht verkrümmt)
- **längentreu** (Strecken werden in gleich lange Strecken abgebildet, also nicht verlängert, nicht verkürzt)

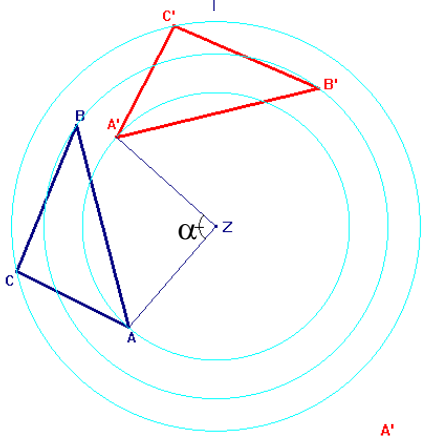
Zudem besitzen die Abbildungen alle auch Fixpunkte (das sind Punkte, die auf sich selber abgebildet werden, also an Ort bleiben):

Geradenspiegelung:

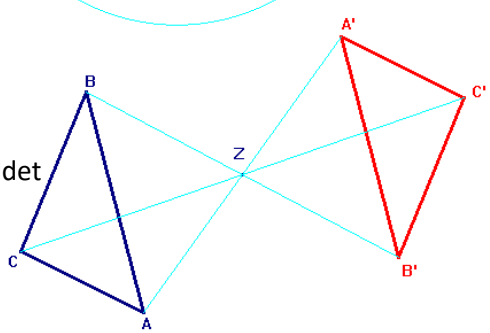
- Die Symmetrieachse s ist Fixgerade
- winkeltreu
- geradentreu
- längentreu
- Original und Bild schneiden sich auf s



- **Drehung:**
  - Der Drehpunkt Z ist Fixpunkt
  - winkeltreu
  - längentreu
  - geradentreu
  - Original, Drehpunkt und Bild beschreiben den Drehwinkel α.



- **Punktspiegelung**:
  - Das Symmetriezentrum Z ist Fixpunkt.
  - geradentreu
  - längentreu
  - winkeltreu
  - Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet
  - Alle Verbindungen von Original und Bild gehen durch Z.

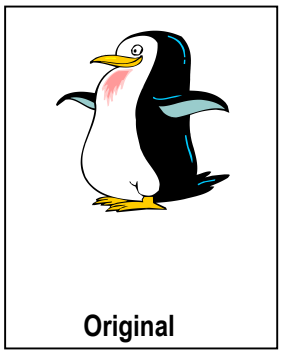


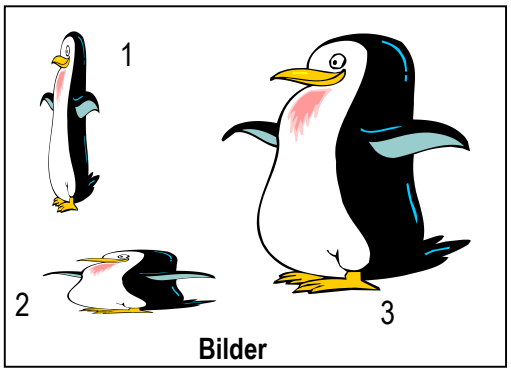
Und jetzt lernen wir eine neue Abbildung kennen. Welche Eigenschaften mag sie haben? Wir versuchen uns, ihr zu nähern.

2. Die Zentrische Streckung

2.1 Einleitung

Aus der Mathematik kennen wir die Proportionalität. Dort geht es ja bekanntlich um Verhältnisse. Ganz genau wie in der folgenden Abbildung:



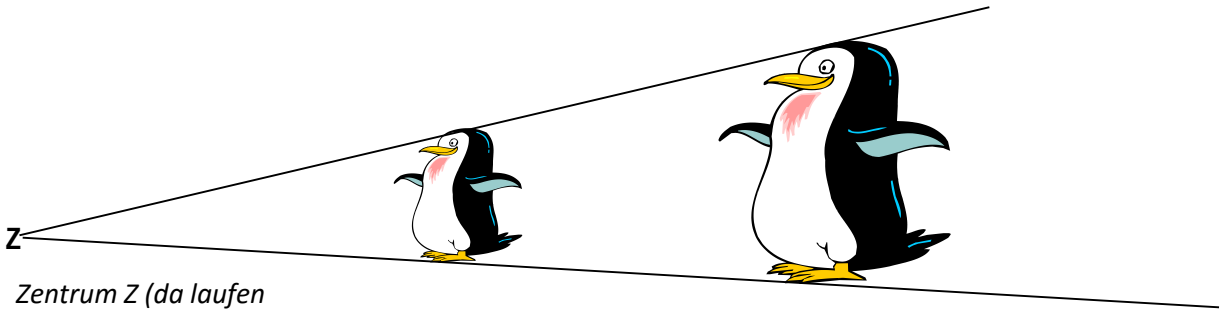


Hier ist natürlich nur Bild 3 korrekt vergrössert (also proportional oder verhältnisgleich zum Original).

Geometrisch bezeichnet man eine solche proportionale Vergrösserung (oder Verkleinerung) als „zentrische Streckung“

Schauen wir uns den Begriff „Zentrische Streckung“ genauer an. Er besteht aus zwei Teilen, nämlich **„Zentrisch“,** also irgendwie **auf ein Zentrum bezogen** und dem Begriff **„Streckung“**, also etwas **„in die Länge ziehen“** – bzw. „Zusammenstossen“.

Im Detail sieht das so aus (ganz ähnlich dem Fluchtpunkt bei perspektivischem Zeichnen):



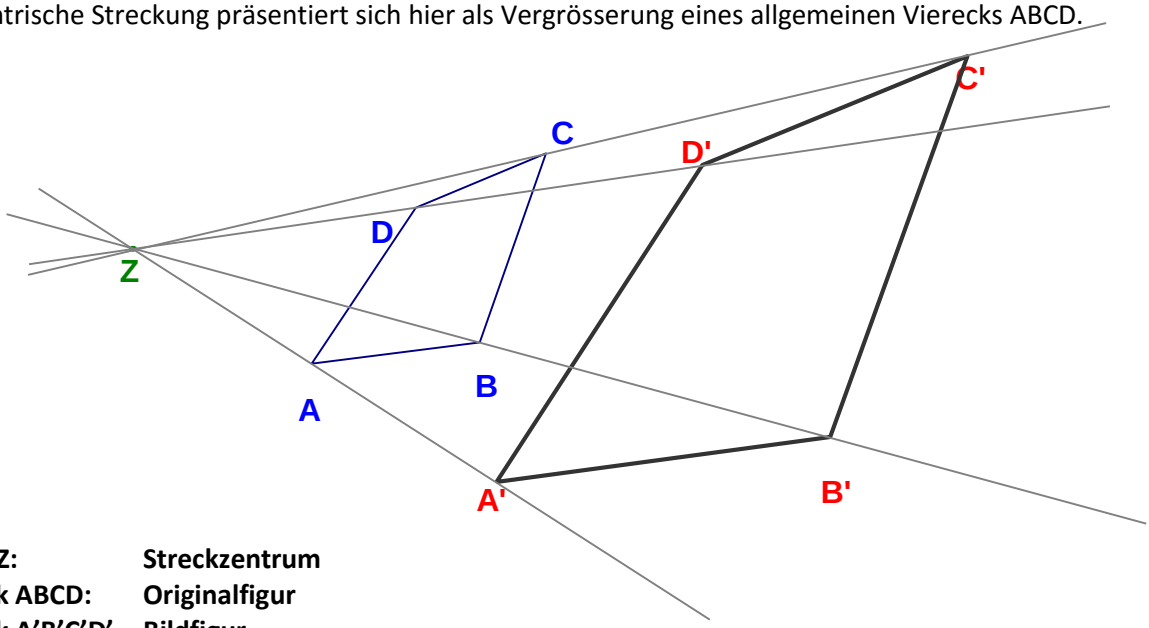
Zentrum Z (da laufen die Strahlen zusammen)

Die beiden Strahlen zeigen die „Streckungswege (die Bahnen, in denen die Figur sich bewegen muss)

Zentrische Streckung kommt vielfach vor, so zum Beispiel beim Modellbau, beim Arbeiten mit Computer (Skalieren von Bildern), sogar bei geometrischen Konstruktionen und in Alltagsproblemen. Die Abbildung ist eine allgemeine Abbildung, die die uns bisher bekannte Punktspiegelung als Sonderfall einschliesst.

2.2 Die Abbildung und ihre Vorschriften

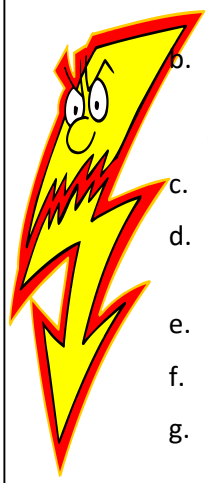
Die zentrische Streckung präsentiert sich hier als Vergrösserung eines allgemeinen Vierecks ABCD.



Punkt Z: **Streckzentrum**
Viereck ABCD: **Originalfigur**
Viereck A'B'C'D' **Bildfigur**
Streckfaktor k: **Bezeichnet den Proportionalitätsfaktor (Verhältniswert) von Bildstrecke zu Originalstrecke.**
In diesem Beispiel ist k = 2
(Das bedeutet, dass jede Bildstrecke doppelt so lang ist wie ihr Original)

Mit diesen Elementen ist die zentrische Streckung definiert. Aus dem obigen Bild lassen sich auch die Abbildungsvorschriften leicht herauslesen:

Abbildungsvorschriften:



a. Jeder Punkt P und sein Bildpunkt P' liegen auf einer Geraden, die durch das Streckzentrum Z geht. *(Die Verbindung von Originalpunkt und Bildpunkt geht durch das Streckzentrum)*

b. Der Abstand des Bildpunktes P' von Z wird durch den Betrag des Streckfaktors k bestimmt.
Es gilt: $\overline{P'Z} = k \bullet |PZ|$
(Der Abstand des Bildpunktes von Z ist k mal länger als der Abstand des Originalpunktes zu Z)

c. Das Bild einer Geraden g ist eine parallele Gerade g'.

d. Die Länge der Bildstrecke wird durch die Länge der Originalstrecke und den Streckfaktor k bestimmt. *(Die Bildstrecke ist k mal länger als die Originalstrecke)*

e. In zentrisch gestreckten Figuren bleiben alle Winkel erhalten.

f. Liegt ein Punkt P auf einer Geraden g, dann liegt sein Bildpunkt P' auf der Bildgeraden g'

g. Die durch zentrische Streckung erzeugten Figuren sind zueinander ähnlich (formgleich, proportional)

h. Alle Kreise sind zueinander ähnlich. Alle Quadrate sind zueinander ähnlich. Alle gleichseitigen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

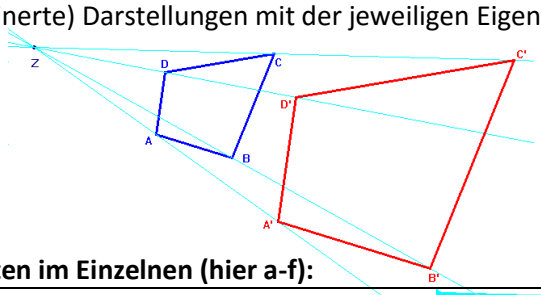
Der **Streckfaktor entspricht dem Proportionalitätsfaktor** (Verhältniswert). Es gilt:

$$\text{Streckfaktor } k = \frac{\text{Bildstrecke}}{\text{Originalstrecke}} = \frac{\text{Entfernung vom Streckzentrum zum Bildpunkt}}{\text{Entfernung vom Streckzentrum zum Originalpunkt}} = \text{konstant}$$

Wir wollen diese Abbildungsvorschriften anhand eines Musters einzeln nachprüfen und untersuchen. Damit du auch verstehen und nachvollziehen kannst, wie man zu diesen Behauptungen kommt:

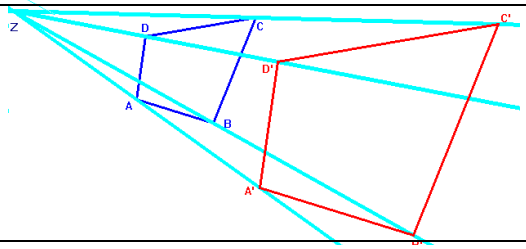
2.3 Untersuchen einer zentrisch gestreckten Figur auf die Abbildungsvorschriften:

So sieht die Figur als Ganzes aus. Das Viereck ABCD wurde mit Streckfaktor k=2 gestreckt. Untenstehend finden wir (z.T. verkleinerte) Darstellungen mit der jeweiligen Eigenschaftsprüfung.



Die Abbildungsvorschriften im Einzelnen (hier a-f):

a Jeder Punkt P und sein Bildpunkt P' liegen auf einer Geraden, die durch das Streckzentrum Z geht. (*Die Verbindung von Originalpunkt und Bildpunkt geht durch das Streckzentrum)*

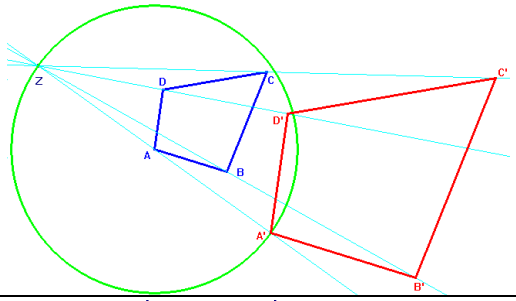


✓

➔ **Dies ist klar zu sehen:**
Die Geraden AA', BB', CC' und DD' gehen alle durch Z

---

b *Der Abstand des Bildpunktes P' von Z wird durch den Betrag des Streckfaktors k bestimmt.*
Es gilt: $\overline{P'Z} = k \bullet |\overline{PZ}|$

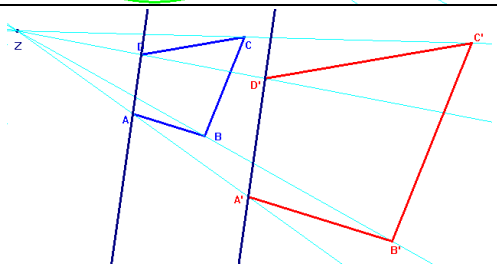


✓

➔ ***Die Strecke A'Z ist genau doppelt so lang wie die Strecke AZ. Im Beispiel wird dies mit dem Kreis um A gezeigt. Der Streckfaktor in diesem Fall ist 2.***

---

c *Das Bild einer Geraden g ist eine parallele Gerade g'.*

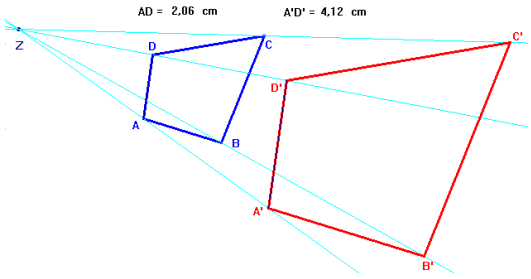


✓

➔ **Eindeutig zu sehen: AD ist parallel zu A'D', AB ist parallel zu A'B', AC ist parallel zu A'C' usw.**

---

d *Die Länge der Bildstrecke wird durch die Länge der Originalstrecke und den Streckfaktor k bestimmt. (Die Bildstrecke ist k mal länger als die Originalstrecke)*

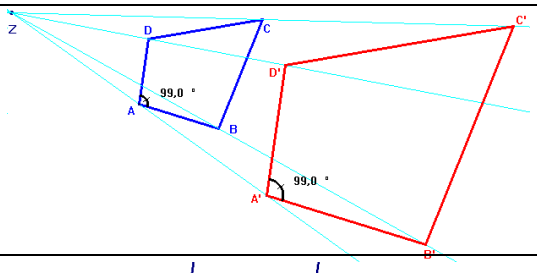


✓

➔ **Vor dem Verkleinern der Figur gemessen:**
AD = 2.06cm, A'D' = 4.12 cm = 2• 2.06 = k • AD.

---

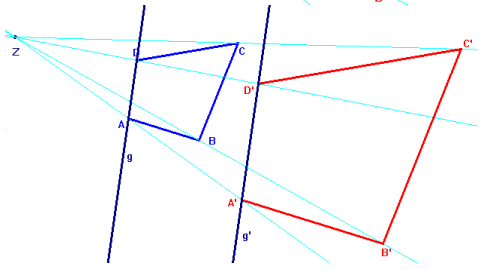
e *In zentrisch gestreckten Figuren bleiben alle Winkel erhalten.*
Als Beispiel ist der markierte Winkel α



✓

---

f *Liegt ein Punkt P auf einer Geraden g, dann liegt sein Bildpunkt P' auf der Bildgeraden g'*



✓

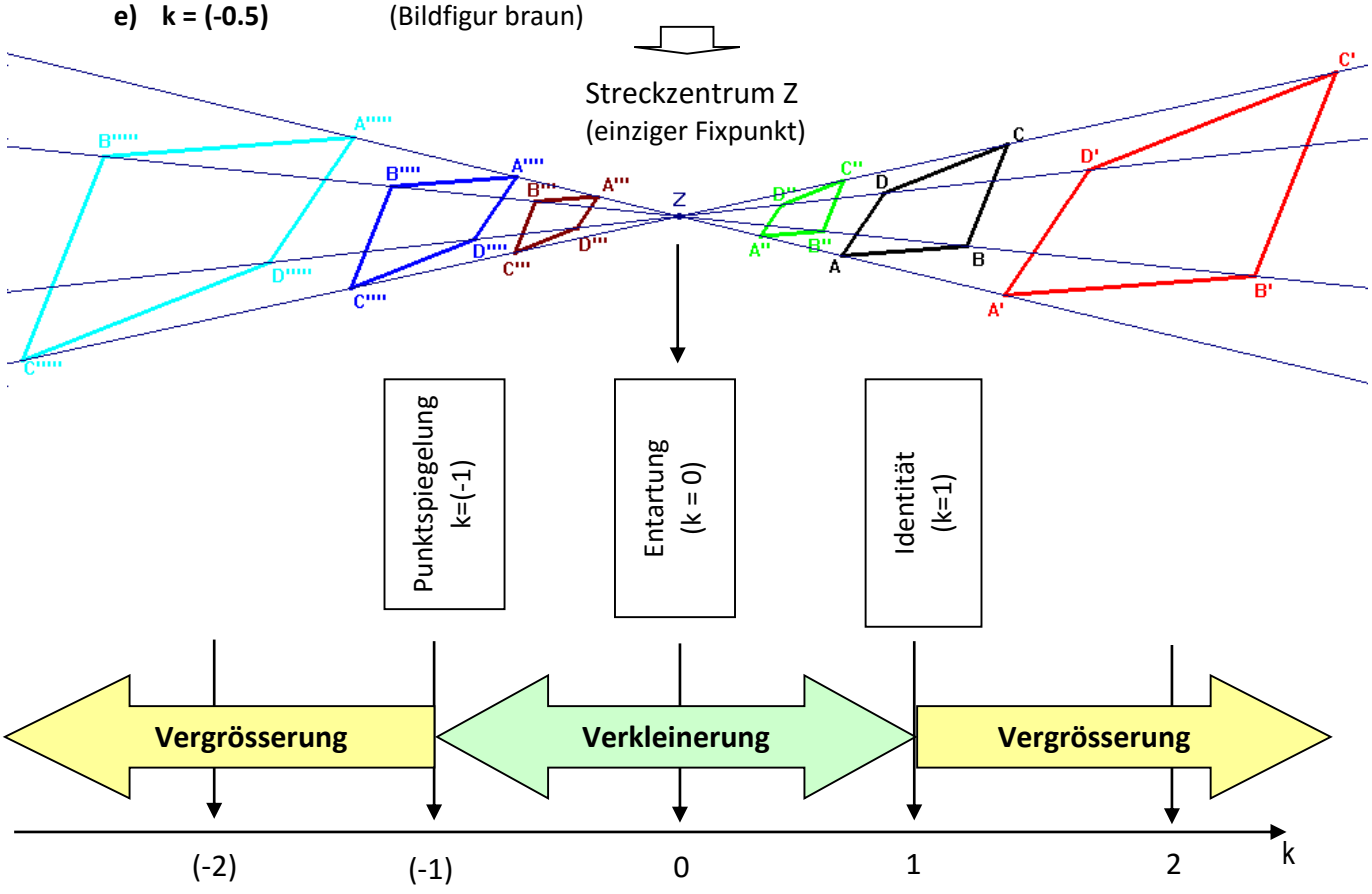
➔ **A liegt auf der Geraden g, A' liegt auf g'. Dies gilt auch für alle anderen Punkte und ihr Bild.**

2.4 Der Einfluss des Streckfaktors

Aus den Abbildungsvorschriften kann man die Bedeutung des Streckfaktors herauslesen. Er bestimmt, welche Grösse die Bildfigur erhält, er bestimmt auch, wo sie zu liegen kommt. Somit müssen wir diesen Streckfaktor speziell betrachten.

Ein Viereck ABC (Originalfigur, schwarz) wurde mit den folgenden Streckfaktoren abgebildet:

a) **k = 2** (Bildfigur rot)
b) **k = 0.5** (Bildfigur grün)
c) **k = (-1)** (Bildfigur blau)
d) **k = (-2)** (Bildfigur hellblau)
e) **k = (-0.5)** (Bildfigur braun)



Umlaufsinn der Figur bleibt bestehen	Umlaufsinn der Figur bleibt gleich

Wir können also feststellen, dass für verschiedene Streckfaktoren k verschiedene Bilder entstehen. Dies mit den oben angezeichneten Gesetzmässigkeiten:

k > 1:	Vergrösserung der Originalfigur Umlaufsinn bleibt erhalten
k= 1	Identität (Figur wird auf sich selber abgebildet)
(-1) < k< 1	Verkleinerung der Originalfigur
k = 0	Entartung (Figur wird auf einen Punkt abgebildet)
k = (-1)	Punktspiegelung der Figur am Streckzentrum Z
k < (-1)	Vergrösserung der Originalfigur Umlaufsinn bleibt erhalten.
k > 0	Umlaufsinn bleibt erhalten.
k < 0	Umlaufsinn bleibt erhalten.

3. Konstruktionstipps zur Zentrischen Streckung (Grundaufgaben)

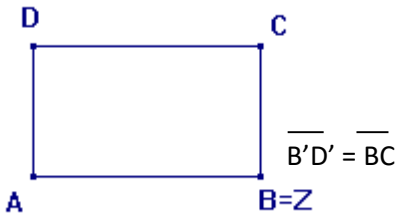
Nicht alle Aufgaben sind so ganz einfach mit gegebenem Streckzentrum, Streckfaktor und Originalfigur zu lösen. Wichtig ist es, die Abbildungsvorschriften zu kennen. Damit lässt sich alles lösen. Untenstehend finden sich typische Grundaufgaben und ihre Lösungsidee zur Anwendung der zentrischen Streckung.

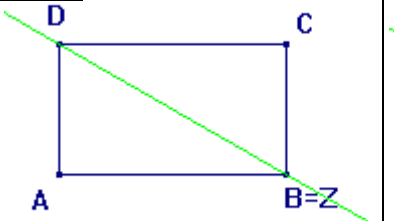
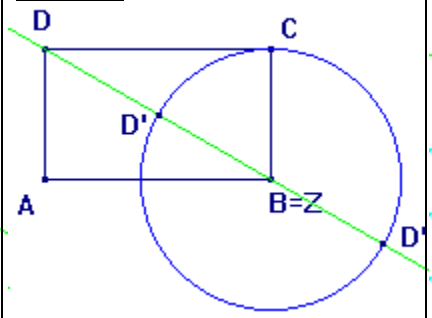
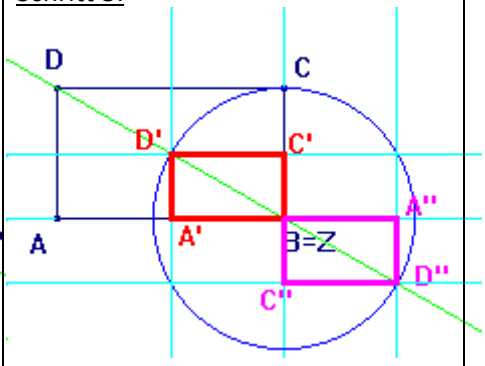
3.1 Grundaufgabe 1 (mit der Eigenschaft „Die Verbindung von Original- und Bildpunkt geht durch Z)

Dies ist die eigentliche Standard-Grundaufgabe. Sie existiert in verschiedenen Versionen. Wir betrachten zwei davon.

Typ 1 – A:

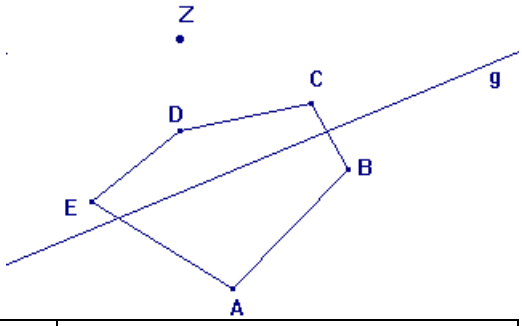
Bilde die gegebene Figur durch eine zentrische Streckung ab.

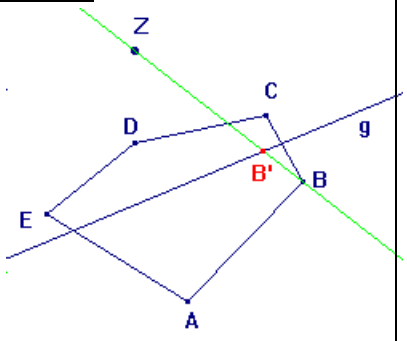
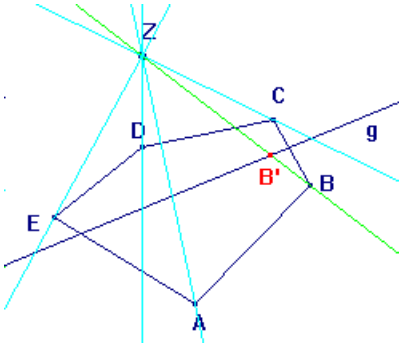
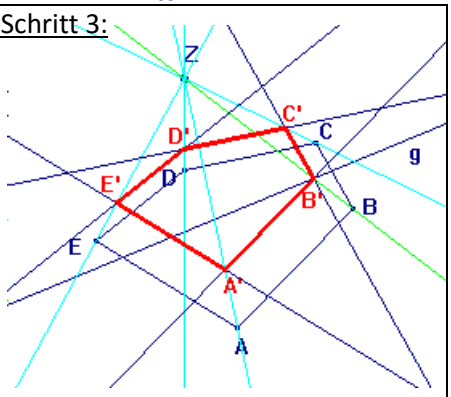


Schritt 1:	Schritt 2:	Schritt 3:
		
Da D' zwingend auf der Verbindung von D mit Z liegen muss, zeichnen wir diese Verbindung ein. Dabei gilt natürlich auch B = Z = B', weil Z ja Fixpunkt ist.	Da BC und B'D' gleich lang sind, kann man diese Entfernung mit dem Zirkel abtragen (Achtung, zwei mögliche Lösungen) (Schnittpunkte des Kreises mit der Verbindung DZ)	Durch Parallelverschieben kann die Figur noch vervollständigt werden (denn Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet)

Typ 1 – B:

Konstruiere das Bild dieser Figur aufgrund einer zentrischen Streckung mit Zentrum Z, so dass B' auf g zu liegen kommt.

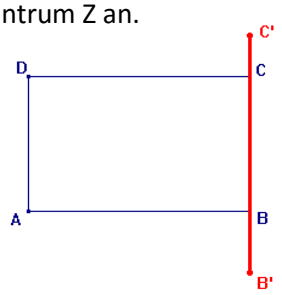


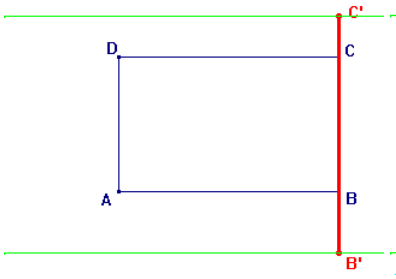
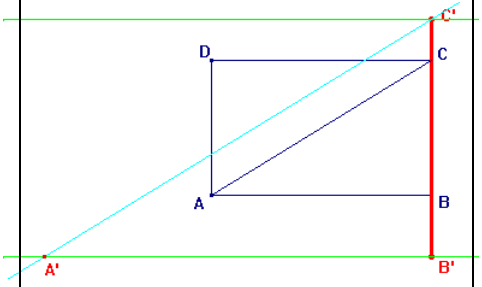
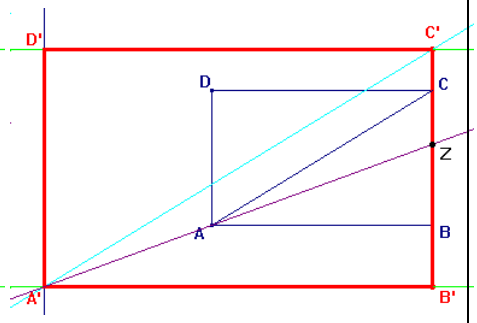
Schritt 1:	Schritt 2:	Schritt 3:
		
B' muss auf der Verbindung von B mit Z liegen. Zudem muss es auf g liegen (Aufgabenstellung). Somit finden wir B'.	Für jeden weitern Eckpunkt gilt das Gleiche: Er liegt auf der Verbindung von Z und Originalpunkt.	Durch Parallelverschieben kann die Figur noch vervollständigt werden. (Jeweils Schnittpunkte der Parallelen mit der Verbindung durch Z)

3.2 Grundaufgabe 2 (mit der Eigenschaft „Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet“)

Typ 2 – A:

Gegeben ist ein Viereck. Eine Seite der zugehörigen Bildfigur, entstanden durch zentrische Streckung ist farbig ausgezogen. Vervollständige die Bildfigur und gib das Streckzentrum Z an.



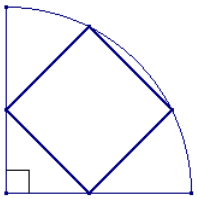
Schritt 1:	Schritt 2:	Schritt 3:
		
Da alle Originalgeraden auf parallele Bildgeraden abgebildet werden, können wir die entsprechenden Parallelen zeichnen (AB parallel durch den Punkt B’, CD parallel durch den Punkt C’)	Damit wir jetzt einen weiteren Bildpunkt finden (z.B. A’) verwenden wir die gleiche Überlegung noch einmal. Die Strecke AC (einzeichnen!) wird auf die Parallele A’C’ abgebildet. Somit finden wir A’ als Schnittpunkt der zwei Parallelen.	Durch Parallelverschieben von AD finden wir jetzt noch D’. Das Streckzentrum kann einfach konstruiert werden. Es liegt mit Sicherheit auf C’C (rsp. B’B) wenn wir jetzt noch AA’ verbinden ist der entsprechende Schnittpunkt das Streckzentrum Z. (Z liegt auf der Verbindung von Original- und Bildpunkt)

3.3 Grundaufgabe 3 (Einschreiben von Figuren in gegebene Figuren, Streckenverhältnisse zeichnen)

Diese Aufgabe ist wohl die schwierigste dieser Serie. Denn hier ist die zentrische Streckung nur ein Hilfsmittel, das man gezielt einsetzen muss. Übrigens: Einschreiben bedeutet, dass jeder Eckpunkt der eingeschriebenen Figur auf einer Strecke / Kreisbogen der umschriebenen Figur liegt.

Typ 3 – A:

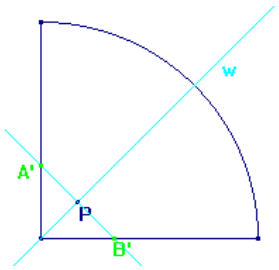
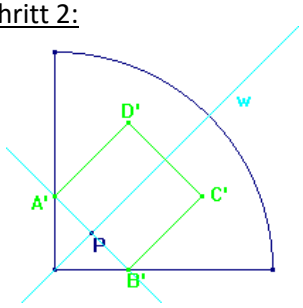
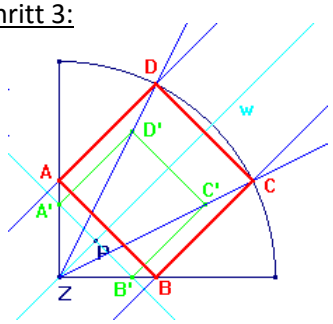
Schreibe dem Viertelkreis ein Quadrat ein (gemäss nebenstehender Abbildung).



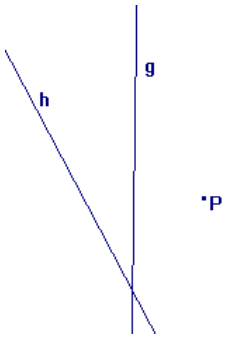
Wir müssen jetzt die verlangten Bedingungen einmal genauer anschauen:

1. Wir müssen ein Quadrat zeichnen (Form der eingeschriebenen Figur)
2. Je eine Ecke muss auf einem Kreisradius liegen (hier A und B)
3. Die beiden anderen Ecken liegen auf dem Kreisbogen.

Die Idee zum Lösen: Nicht alle Bedingungen gleichzeitig erfüllen, wir beschränken uns zuerst auf zwei Bedingungen (1 und 2).

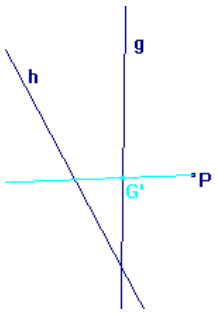
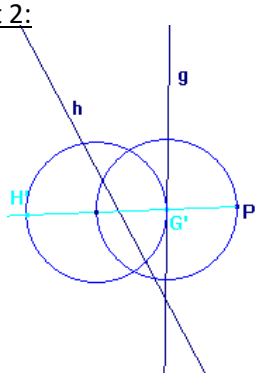
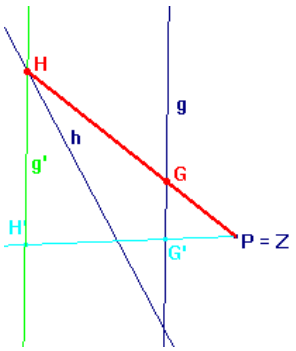
Schritt 1:	Schritt 2:	Schritt 3:
		
Wir beginnen mit dem Viertelkreis. Damit diesem ein Quadrat überhaupt eingeschrieben werden kann, muss dieses Quadrat so liegen, dass zwei seiner Seiten senkrecht zur Winkelhalbierenden des Viertelkreises liegen (anders geht's nicht). Wir zeichnen also die Winkelhalbierende und **danach wählen wir einen <u>beliebigen Punkt P,</u> durch welchen wir die Senkrechte zu w zeichnen. Die beiden Schnittpunkte nennen wir A' und B'.**	**Jetzt zeichnen wir das Quadrat fertig, welches die beiden Bedingungen 1 und 2 erfüllt.** (Es ist ein Quadrat und zwei Eckpunkte liegen auf den Viertelkreisradien.) <u>➔ Es ist eine Hilfsfigur.</u> **Die Hilfsfigur ist jetzt noch zu klein, man kann sie aber (zentrisch) strecken. (Zentrum Z: Schnittpunkt der Kreisradien)**	Die Figur wird jetzt am Streckzentrum Z gestreckt. Dabei wandern A' und B' auf den Kreisradien, die Punkte C' und D' bis auf den Kreisbogen. Und schon sind wir fertig. **Noch einmal das Vorgehen:** • Hilfsfigur zeichnen (ihre Grösse ist frei wählbar). Die Hilfsfigur erfüllt schon zwei von drei Bedingungen. • Hilfsfigur strecken

<u>Typ 3 – B:</u>
Lege durch den Punkt P eine Gerade, die die Gerade g in G und die Gerade h in H schneidet. Dabei soll PH dreimal so lang sein wie PG..



Auch hier schauen wir die verlangten Bedingungen einmal genauer an:
1. Die Gerade g muss in G geschnitten werden
2. PH ist dreimal so lang wie PG
3. Der Punkt H muss auf der Geraden h liegen.

Die Idee zum Lösen: Nicht alle Bedingungen gleichzeitig erfüllen, wir beschränken uns zuerst auf zwei Bedingungen (1 und 2).

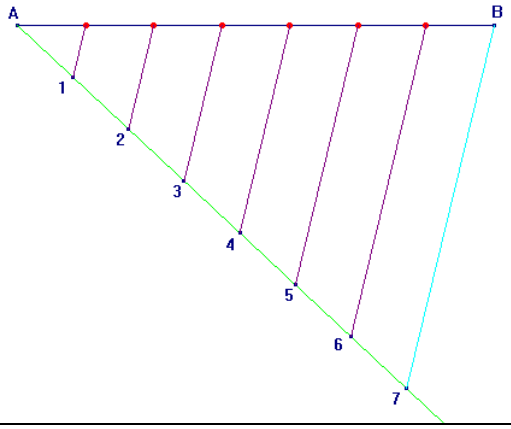
Schritt 1:	Schritt 2:	Schritt 3:
		
Wieder wählen wir also zuerst die Bedingung 1, also eine Gerade durch P, welche g in G schneidet. So finden wir den Punkt G'	Jetzt tragen wir PG' noch zweimal von G' aus ab. Dort finden wir H'. (PH' ist dreimal so lang wie PG')	Wenn wir uns jetzt den Punkt **H' als zentrisch gestrecktes Bild von G'** vorstellen (wegen dem dreimal so lang geht das gut), verwenden wir die Regel: Liegt ein Originalpunkt auf der Geraden g, liegt ihr Bildpunkt auf der parallelen Geraden g'. **Das bedeutet, wir brauchen die Parallele von g durch H'. Der Schnittpunkt mit h ist der Punkt H.** Dann finden wir noch G (PH mit g schneiden) und sind fertig.

4. Streckenteilung – Eine Anwendung der zentrischen Streckung.

Strecken jeder Länge nur mit Massstab, Zirkel und Geo-Dreieck, aber ohne irgendwie zur rechnen, zu teilen, ist nicht ganz einfach. Dennoch geht das ganz gut mit dem Hintergrund der zentrischen Streckung.

Teile die Strecke AB in 7 gleiche Stücke (ohne Rechner, ohne Kopfrechnen)

Schritt 1 – einen frei wählbaren Winkel an die Strecke anlegen (durch einen Endpunkt)
Schritt 2 – auf dem zweiten Schenkel des Winkels sieben Stücke abtragen (z.B. mit dem Massstab jeweils 1 cm lange Stücke abtragen).
Schritt 3 – Den Endpunkt auf dem Schenkel des Winkels mit B (Endpunkt der Strecke) verbinden.
Schritt 4 – Parallelverschieben dieser Verbindung durch jede Markierung auf dem Winkel.

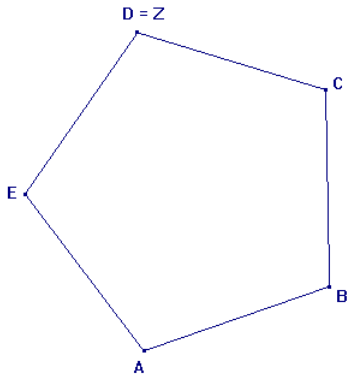


Auf diese Art kann eine Strecke auch in einem bestimmten Verhältnis geteilt werden (z.B. 3:4). Auch dann gibt es sieben Stücke (3+4), man braucht in einem solchen Fall aber nur das Stück Nr. 3 zu zeichnen, denn dort liegt der Teilpunkt.

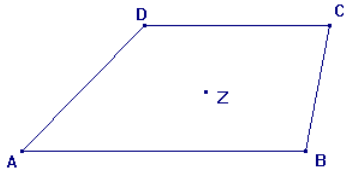
Aufgaben Zentrische Streckung:

1. Strecke die gegebene Figur mit zentrischer Streckung.

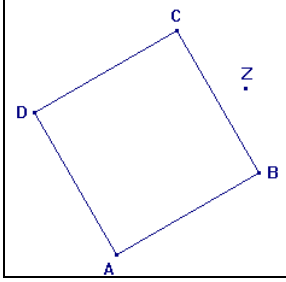
a) k = 0.5



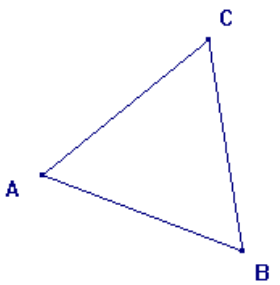
b) k = 2



c) k = (-1.5)

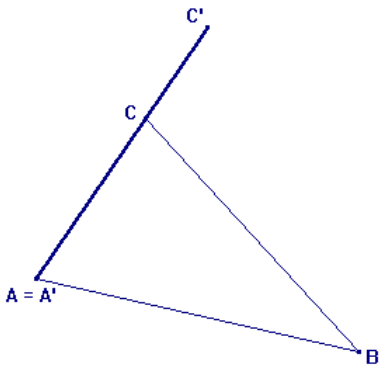


d) A = A' = Z, k = 1.5

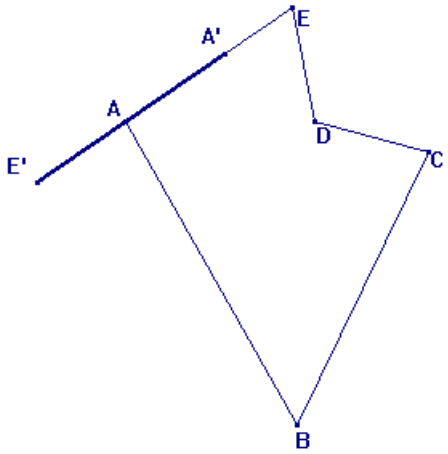


2. Konstruiere das Bild der gegebenen Figur, wenn du einen Teil der durch zentrische Streckung entstandenen Bildfigur kennst. Bestimme auch das Streckzentrum Z. Ein kurzer KB gehört natürlich auch dazu.

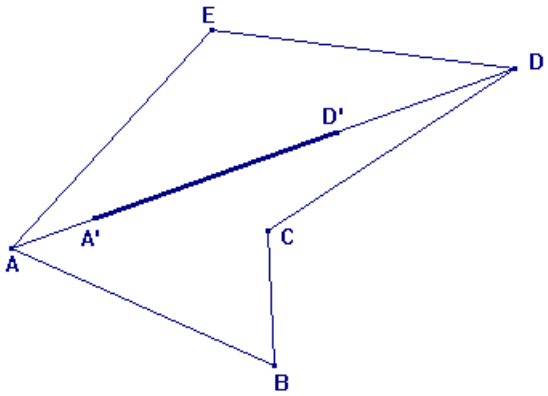
a)



b)

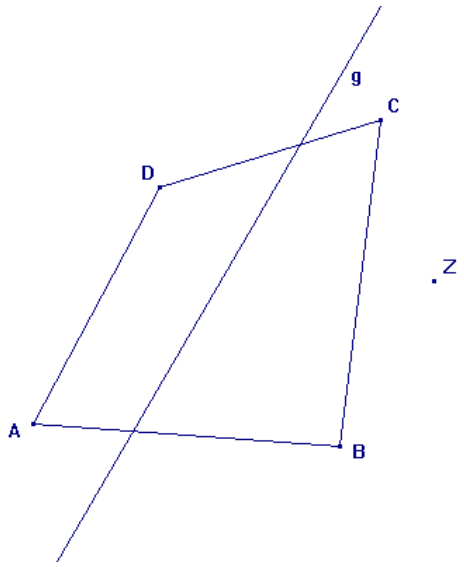


c)

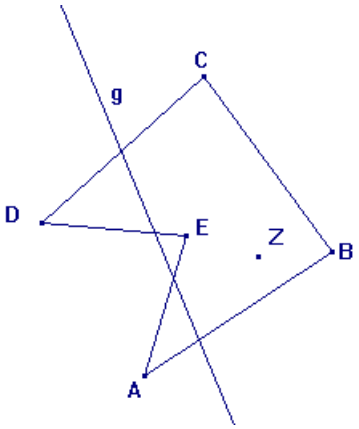


3. Konstruiere (mit kurzem KB) das Bild der gegebenen Figur mit Hilfe einer zentrischen Streckung mit Zentrum Z so, dass…

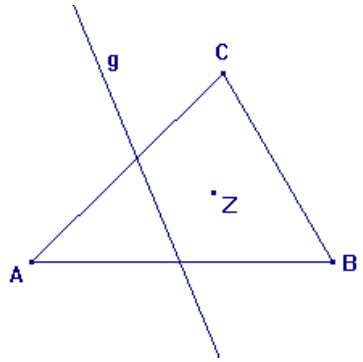
a) der Punkt D' auf g liegt.



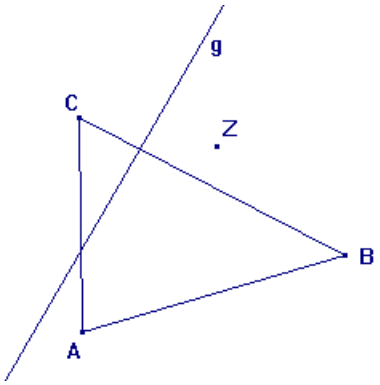
b) der Punkt E' auf g liegt.



c) ein Eckpunkt der Bildfigur auf g liegt. Zeichne alle Lösungen und markiere mit rot die grösste Bildfigur.

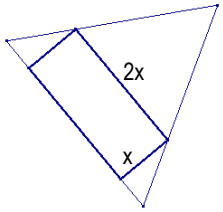


d) die Bildfigur möglichst klein wird und ein Eckpunkt der Bildfigur auf g liegt.



4. Die gegebene Figur ist dünn ausgezogen. Schreibe ihr eine Figur entsprechend der Skizze ein (mit KB, natürlich)

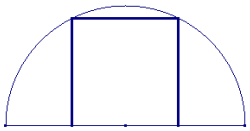
a) Skizze:



KB:

Konstruktion:

b) Skizze:



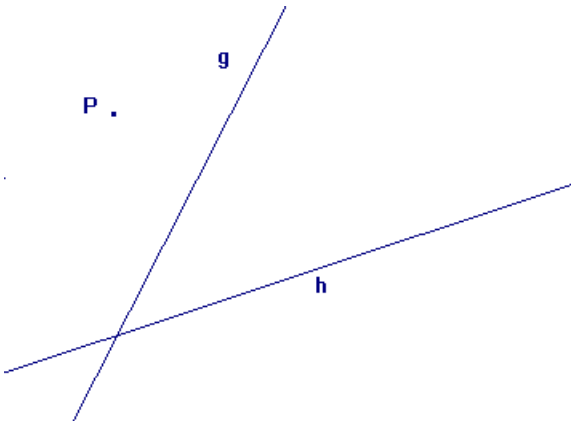
KB:

Konstruktion:

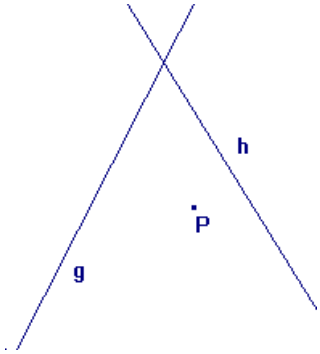
5. Die Gerade AB soll in 13 gleich lange Teile zerlegt werden. Konstruiere diese Teilung.

6. Lege durch P eine Gerade, welche die Gerade g in A und die Gerade h in B schneidet, wobei

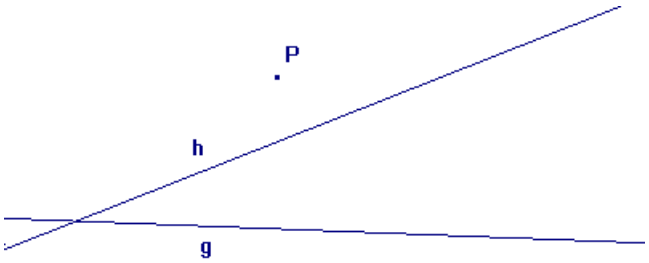
a) PB zweieinhalb mal so lang sein soll wie PA



b) PB halb so lang ist wie PA.

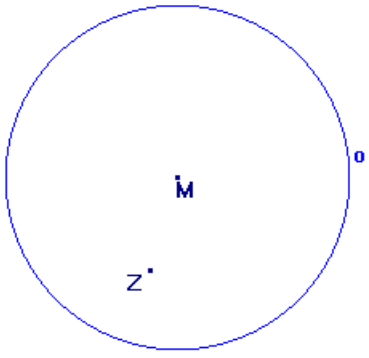


c) Sich die Strecken PB zu BA wie 3:2 verhalten.

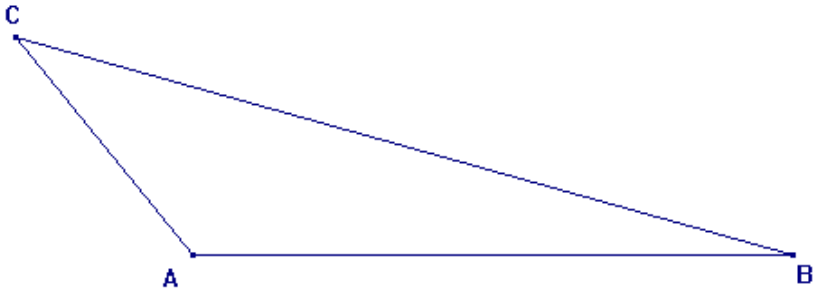


Teile die Strecke CD im Verhältnis 5:4 und bezeichne den Teilpunkt mit T.

7. Strecke einen Kreis o mit dem Streckfaktor k = 1.5 vom Streckzentrum Z aus.

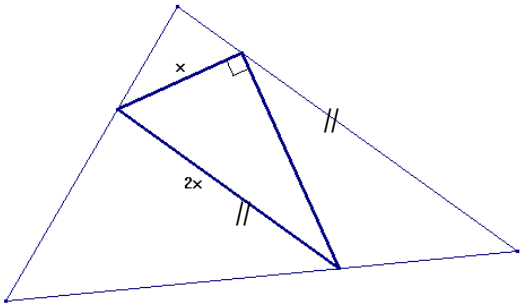


8. Schreibe dem gegebenen Dreieck ein Rechteck ein, dessen Länge dreimal so gross wie wie seine Breite und dessen eine Seite (die Länge) auf BC liegt (mit KB).



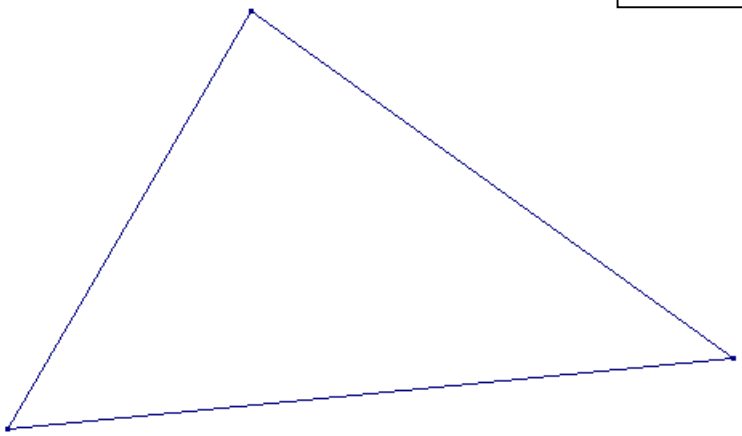
9. Die gegebene Figur ist dünn ausgezogen. Schreibe ihr eine Figur entsprechend der Skizze ein (mit KB, natürlich)

a) Skizze:

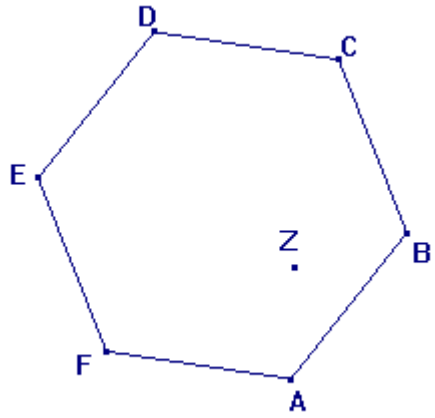


KB:

Konstruktion:

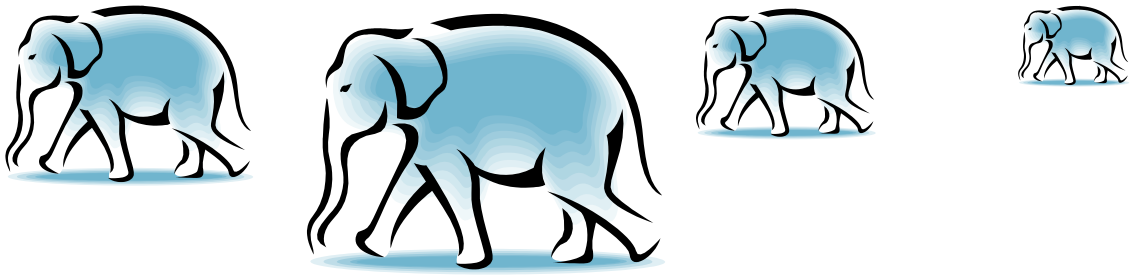


10. Strecke die gegebene Figur mit dem Streckfaktor k = ($-\frac{5}{3}$). Den Rechner darfst du nicht benützen, auch Kopfrechnen ist nicht erlaubt. Nur konstruieren. (KB nicht vergessen)



5. Ähnlichkeit – Begriff, Herleitung des 1. und 2. Strahlensatz

5.1 Ähnliche Figuren



Alle hier abgebildeten Elefanten sind ähnlich (das heisst, sie sind vergrössert oder verkleinert). Es handelt sich immer um den gleichen Elefant, der allerdings verschieden gross abgebildet ist.

Dagegen sind von den vier hier gezeigten Mäusen nur zwei ähnlich zueinander, nämlich die erste und die letzte. Die beiden anderen sind nicht korrekt vergrössert worden (das Verhältnis von Höhe und Breite ist nicht dasselbe wie beim Original).
Diese Figuren erinnern uns an zwei Themenbereiche, die wir schon besprochen haben: Die zentrische Streckung als geometrischer Themenbereich, die Proportionalität als mathematisches Thema mit gleicher Grundidee. **Ähnlich heisst, dass die Form der Figuren gleich bleibt, wobei die Grösse der Figuren nicht unbedingt gleich bleibt, also eine Vergrösserung oder Verkleinerung** (→ Streckfaktor in der zentrischen Streckung, Proportionalitätsfaktor in der Proportionalität)

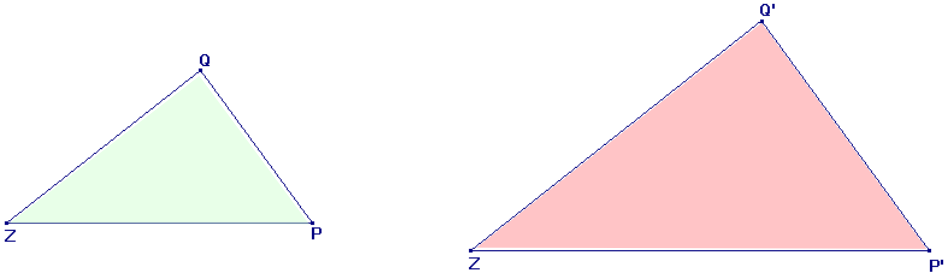
Entscheidend dabei ist die Tatsache, dass sich jeweils eine Originalstrecke proportional zu ihrer zugehörigen Bildstrecke verhält, oder anders gesagt:

Originalstrecke • Streckfaktor = Bildstrecke *(Originalstrecke • Proportionalitätsfaktor = Bildstrecke)*

5.2 Der zweite Strahlensatz

Wir beweisen zuerst den zweiten Strahlensatz, weil dieser einfacher erklärt werden kann. Dennoch heisst er „zweiter Strahlensatz“, weil dies eine internationale Norm der Namensgebung ist. Also nicht verwirren lassen und aufmerksam weiter lesen:

1. **Schritt:**
   Wir zeichnen die beiden ähnlichen Dreiecke ZPQ und ZP'Q'. Es gilt: **ΔZPQ ~ΔZP'Q'** (~ heisst: ist ähnlich)

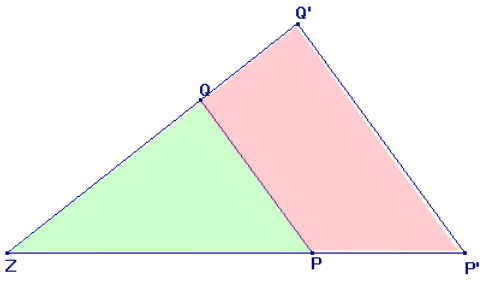


Wichtige Zusatzinformation – im neuen Lehrmittel nicht enthalten – aus meiner Sicht aber sehr wertvoll

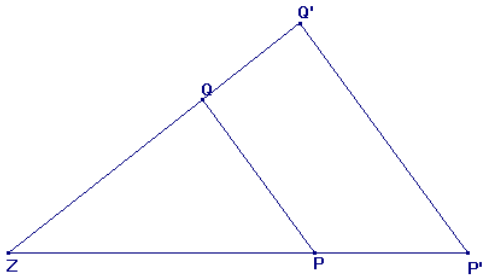
Wichtige Zusatzinformation – im neuen Lehrmittel nicht enthalten – aus meiner Sicht aber sehr wertvoll

2. <u>Schritt:</u>

Wir schieben die Dreiecke so übereinander, dass der Punkt Z für beide Dreiecke am gleichen Ort liegt:

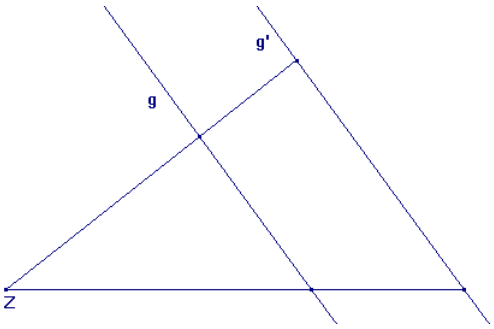


ohne Farben:



Die Figur ist jetzt eine typische Figur der zentrischen Streckung, verallgemeinert sieht sie wie folgt aus:

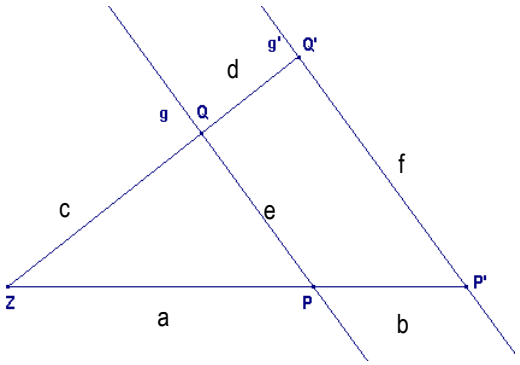
Es gilt jetzt: PQ // P'Q' und somit **g // g'**



Wir beschriften die Abschnitte in der Zeichnung:

<u>Nach zentrischer Streckung gilt ja:</u>

$$\frac{\text{Bildstrecke}}{\text{Originalstrecke}} = \text{Streckfaktor}$$



Führen wir diese Überlegung zu Ende, muss diese Gesetzmässigkeit ja für jede Bild – und Originalstrecke gelten.

Somit gilt : $\frac{\textbf{Bildstrecke}}{\textbf{Originalstrecke}} = \frac{\textbf{f}}{\textbf{e}} = \frac{\textbf{a + b}}{\textbf{a}} = \frac{\textbf{c + d}}{\textbf{c}}$ = Streckfaktor k **(2. Strahlensatz)**

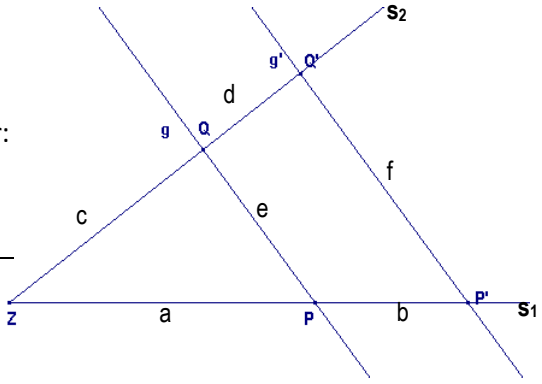
<u>Ausformuliert heisst der zweite Strahlensatz:</u>

Werden zwei Strahlen von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die vom Streckzentrum aus gemessenen Abschnitte auf einem Strahl.

Wichtige Zusatzinformation – im neuen Lehrmittel nicht enthalten – aus meiner Sicht aber sehr wertvoll

5.3 Der erste Strahlensatz

Nach dem zweiten folgt der erste Strahlensatz:



1. <u>Schritt:</u>

Wir verwenden die gleiche, beschriftete Figur wie vorher:
(k ist der Streckfaktor):

Auf dem Strahl s_1 gilt:		*Auf dem Strahl s_2 gilt.*	
$\frac{a+b}{a} = \frac{\textit{Bildstrecke}}{\textit{Originalstrecke}} = k$		$\frac{c+d}{c} = \frac{\textit{Bildstrecke}}{\textit{Originalstrecke}} = k$	
$\frac{a+b}{a} = k$	¦¦ • a	$\frac{c+d}{c} = k$	¦¦ • c
$a + b = ak$	¦¦ - a	$c + d = ck$	¦¦ - c
$b = ak - a$	¦¦ auskl.	$d = ck - c$	¦¦ auskl.
$b = a\,(k-1)$	¦¦ : a	$d = c\,(k-1)$	¦¦ : c
$\frac{b}{a} = k - 1$		$\frac{d}{c} = k - 1$	

weil beide Seiten k-1 ergeben gilt:

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}}$$

Somit gilt : $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}}$ **und ebenso gilt *(durch Umformung)* :** $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ **(1. Strahlensatz)**

<u>Ausformuliert heisst der erste Strahlensatz:</u>

Werden zwei Geraden von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Gerade wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Gerade.

5.4 stets ähnliche Figuren:

Immer ähnlich zueinander sind folgende Figuren:

- Quadrat
- gleichseitiges Dreieck
- Kreis
- Dreiecke mit drei entsprechend gleichen Winkeln

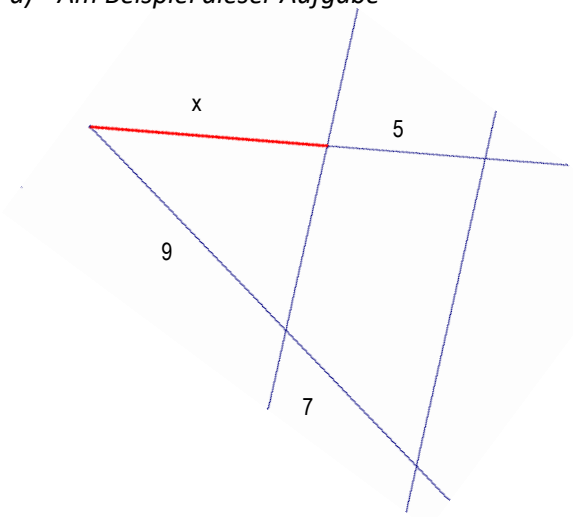
In diesen ähnlichen Figuren können entsprechende Verhältnisse gebildet und verwendet werden (siehe nächste Seite)

Wichtige Zusatzinformation – im neuen Lehrmittel nicht enthalten – aus meiner Sicht aber sehr wertvoll

5.5 Verwenden der Ähnlichkeit zur Lösung von Problemstellungen – Beispiellösungen zur Berechnung:

Die Ähnlichkeit bei Figuren hilft, verschiedene Problemstellungen zu lösen. Wichtig ist dabei, eine saubere Zuordnung der ähnlichen Strecken zu machen. Denn dann lässt sich einfach rechnen

a) Am Beispiel dieser Aufgabe



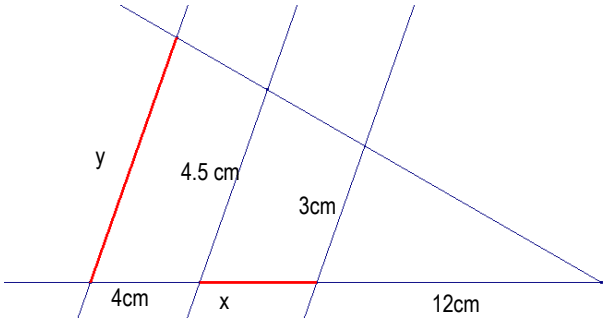
1. Strahlensatz, weil sich alles auf die beiden Strahlen konzentriert, keine Verwendung der Parallelen!

Nach dem **ersten Strahlensatz** gilt in dieser Figur:

$\frac{x}{5} = \frac{9}{7}$ *(Werden zwei Strahlen von Parallelen geschnitten, verhalten sich entsprechende Abschnitte auf den Strahlen gleich)*

Also gilt:
$\frac{x}{5} = \frac{9}{7}$ ¦¦ • HN (35)
$7x = 45$ ¦¦ : 7
$x = \frac{45}{7}$ cm **(= 6.43cm)**

b) Am Beispiel dieser Aufgabe:



2. Strahlensatz, weil hier die Parallelen und die Strahlen verwendet werden!

Nach dem **zweiten Strahlensatz** gilt in dieser Figur:

$\frac{\text{Bildstrecke}}{\text{Originalstrecke}} = \frac{12+x}{12} = \frac{4.5}{3}$ und $\frac{12+x+4}{12} = \frac{y}{3}$

(Werden zwei Strahlen von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die vom Streckzentrum aus gemessenen Abschnitte auf einem Strahl)

<u>Berechnung von x:</u>

Also gilt:
$\frac{12+x}{12} = \frac{4.5}{3}$ ¦¦ • HN (12)
$12 + x = 18$ ¦¦ -12

x = 6cm

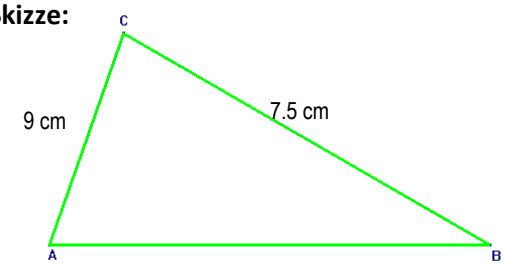
<u>Berechnung von y:</u>

Also gilt:
$\frac{12+x+4}{12} = \frac{y}{3}$ ¦¦ x einsetzen von vorher
$\frac{12+6+4}{12} = \frac{y}{3}$ ¦¦ ausrechnen und • HN (12)
$22 = 4y$ ¦¦ : 4
5.5cm = y

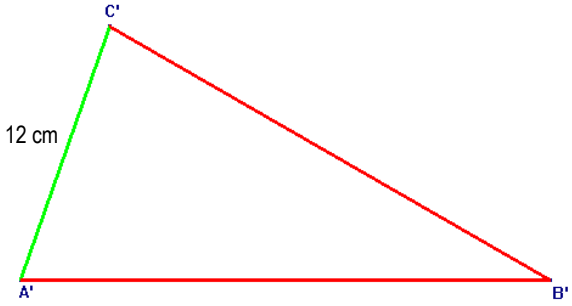
Wichtige Zusatzinformation – im neuen Lehrmittel nicht enthalten – aus meiner Sicht aber sehr wertvoll

c) Am Beispiel dieser Aufgabe:

Skizze:



6 cm



<u>Gegeben:</u> AB = 6cm, AC = 9cm, BC = 7.5cm A'C' = 12cm
<u>Gesucht:</u> A'B', B'C'.

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke wissen wir, dass das Verhältnis von Bild – und zugehöriger Originalstrecke für alle Seiten gleich sein muss.

$$\frac{\text{Bildstrecke 1}}{\text{Originalstrecke 1}} = \frac{\text{Bildstrecke 2}}{\text{Originalstrecke 2}} = \frac{\text{Bildstrecke 3}}{\text{Originalstrecke 3}}$$

Also gilt in diesen beiden ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

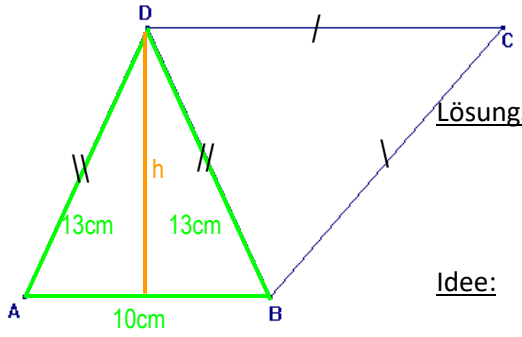
somit berechnen wir A'B' wie folgt:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} \rightarrow \frac{12}{9} = \frac{A'B'}{6} \rightarrow \mathbf{A'B' = \frac{12 \bullet 6}{9} = \frac{72}{9} = 8\ cm}$$

und enstprechend berechnen wir B'C':

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \rightarrow \frac{12}{9} = \frac{B'C'}{7.5} \rightarrow \mathbf{B'C' = \frac{12 \bullet 7.5}{9} = \frac{90}{9} = 10\ cm}$$

d) Weiteres Beispiel:



Berechne Umfang und Flächeninhalt des aus zwei gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetzen Trapezes ABCD. *(AB = 10cm, AD = 13cm)*

<u>Lösungsansatz:</u> Die markierten Strecken sind paarweise gleich lang, also AD = BD und BC = CD. Zudem sind die beiden Dreiecke (wie beschrieben) zueinander ähnlich.

Es gilt also: ΔABD ~ ΔBCD.

<u>Idee:</u> **In ähnlichen Dreiecken haben entsprechende Strecken das gleiche Verhältnis**, es gilt hier also:

$$\frac{\text{Schenkel kleines Dreiecks AD}}{\text{Basis kleines Dreieck AB}} = \frac{\text{Schenkel grosses Dreiecks BC}}{\text{Basis grosses Dreieck BD}}$$

<u>in Zahlen:</u>

$$\frac{13cm}{10cm} = \frac{\text{Schenkel grosses Dreiecks BC}}{13cm}$$

<u>Gleichung:</u>

$$\frac{13}{10} = \frac{x}{13} \quad \text{¦¦ } \bullet 130 \text{ (Hauptnenner)}$$

$$13 \bullet 13 = x \bullet 10 \quad \text{¦¦ vereinfachen}$$

$$169 = 10x \quad \text{¦¦ : 10}$$

$$16.9 = x$$

<u>Lösungen:</u> **Umfang** = 16.9 + 16.9 + 13 + 10 = **56.8 cm**

Flächenberechnung: A = m • h

$$m = \frac{10 + 16.9}{2} = \frac{26.9}{2} = 13.45\ cm$$

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = 12\ cm$$

A = m • h = 13.45 • 12 = **161.4 cm²**

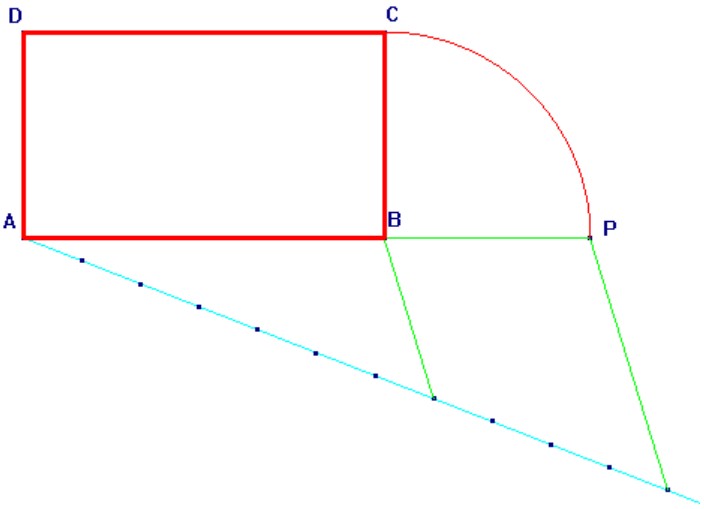
Wichtige Zusatzinformation – im neuen Lehrmittel nicht enthalten – aus meiner Sicht aber sehr wertvoll

5.6 Verwenden der Ähnlichkeit zur Lösung von Problemstellungen – Beispiellösungen zur Konstruktion:

Natürlich nützen uns ähnliche Figuren auch für die Konstruktion. Hier folgen wir unserer alten Idee, nicht alle Bedingungen aufs Mal zu erfüllen, sondern diejenigen, die sich leicht erfüllen lassen zuerst (➔ Hilfsfigur) und dann vergrössern, strecken, drehen (in die richtige Grösse und Position bringen).

a) Beispiel 1:

Längsseite und Breitseite eines Rechtecks messen zusammen 10cm, ihre Längen verhalten sich wie 7 : 4. Konstruiere das Rechteck. *(Hier ist die Lösung verkleinert gezeichnet)*



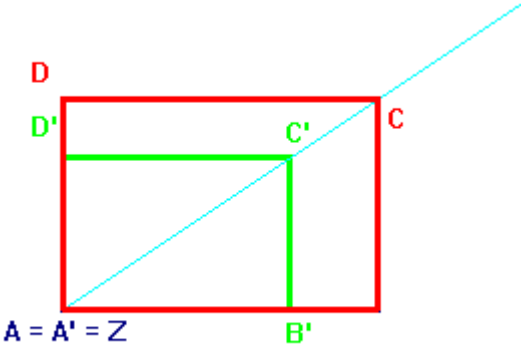
1. Die Zusammengesetzte Länge und Breite einzeichnen (➔ AP = 10cm)
2. Die Strecke AP im Verhältnis 7:4 teilen (dies erzeugt die Ähnlichkeitsfigur nach 1. Strahlensatz)
3. Lot von B auf AB, BP nach oben abtragen.
4. Rechteck vervollständigen.

Idee:

Zusammengesetzte Länge von Längs- und Breitseite im richtigen Verhältnis teilen (mit Ähnlichkeit)

b) Beispiel 2:

Konstruiere das Rechteck, dessen Seitenlängen sich wie 2 : 3 verhalten und dessen Diagonale 5cm misst.



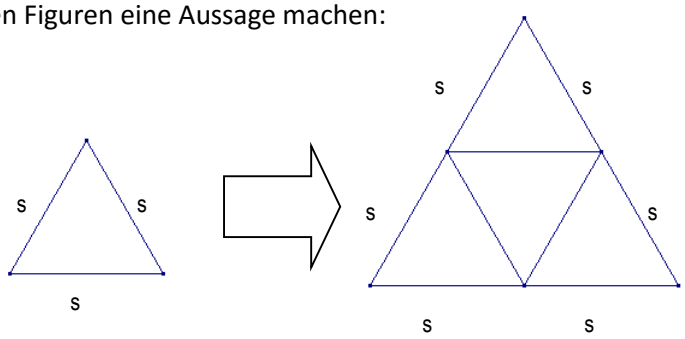
1. Ein Hilfsrechteck A'B'C'D' zeichnen, dessen Länge und Breite sich wie 2:3 verhalten (hier A'B' = 3cm, B'C' = 2cm)
2. Die Diagonale A'C' zeichnen und auf ihr 5cm abtragen. → C
3. Das Hilfsrechteck von A aus strecken (Parallelverschieben von B'C' durch C, D'C' durch C)
4. Rechteck vervollständigen.

Idee:

Zu kleines Rechteck zeichnen, dessen Seitenverhältnis richtig ist (2: 3). Durch Streckung (Ähnlichkeitsabbildung) auf die richtige Grösse bringen.

5.7 Flächenverhältnisse bei ähnlichen Figuren:

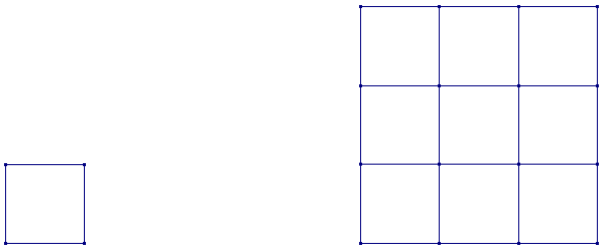
Wie schon bei der zentrischen Streckung bemerkt, können wir auch über das Flächenverhältnis bei ähnlichen Figuren eine Aussage machen:



Seitenlänge s *Seitenlänge 2s*

Verhältnis der Seitenlängen der beiden Dreiecke: 1 : 2

➔ Verhältnis der Flächen: 1 : 4



Seitenlänge s *Seitenlänge 3s*

Verhältnis der Seitenlängen der beiden Quadrate: 1 : 3

➔ Verhältnis der Flächen: 1 : 9

Allgemein gilt: **Das Flächenverhältnis ist quadratisch zum Seitenverhältnis**

Seitenverhältnis 1 : 3 ➔ Flächenverhältnis 1 : 3^2 = 1 : 9

und ganz verallgemeinert:

Seitenverhältnis 1 : n ➔ Flächenverhältnis 1 : n^2

Das Volumenverhältnis ist kubisch zum Seitenverhältnis

Seitenverhältnis 1 : 3 ➔ Flächenverhältnis 1 : 3^3 = 1 : 27

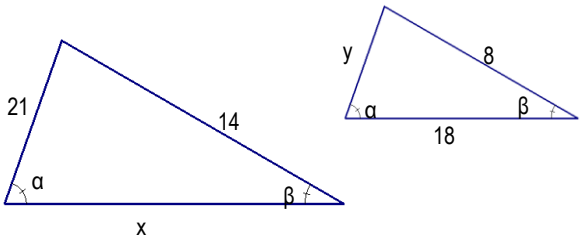
und ganz verallgemeinert:

Seitenverhältnis 1 : n ➔ Flächenverhältnis 1 : n^3

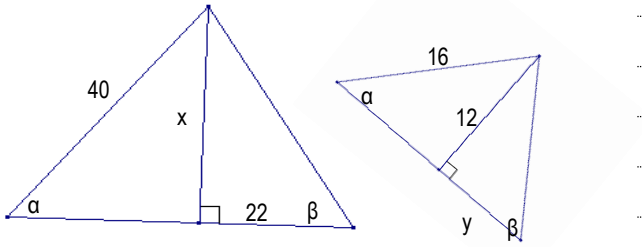
Aufgaben Ähnlichkeit:

1. Berechne die gesuchten Zahlwerte x, y beziehungsweise z.

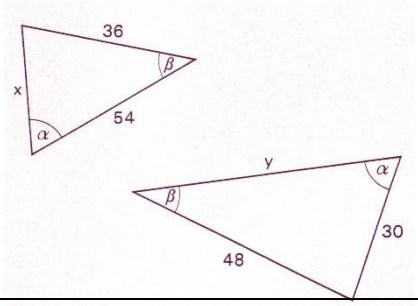
a)



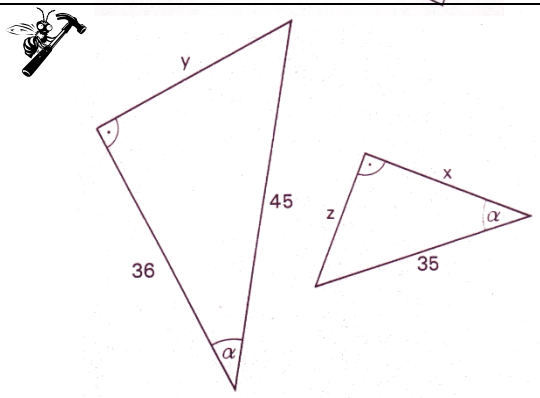
b)



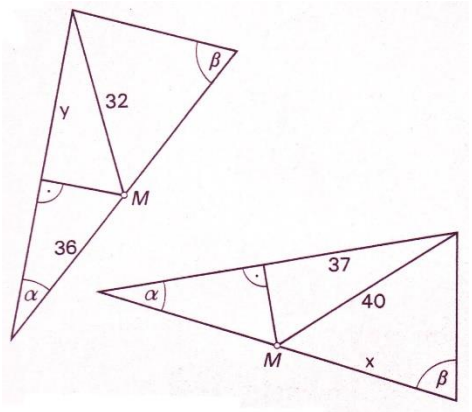
c)



d)

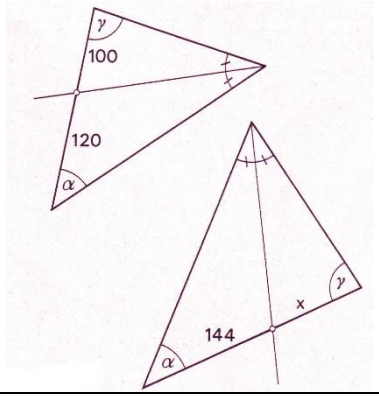


e)

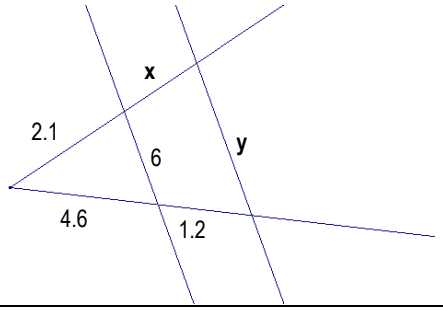


2. Berechne die gesuchten Zahlwerte x, y beziehungsweise z.

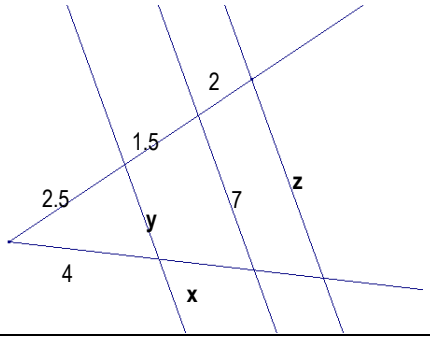
a)



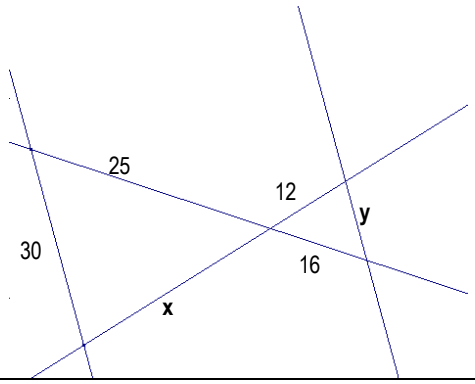
b)



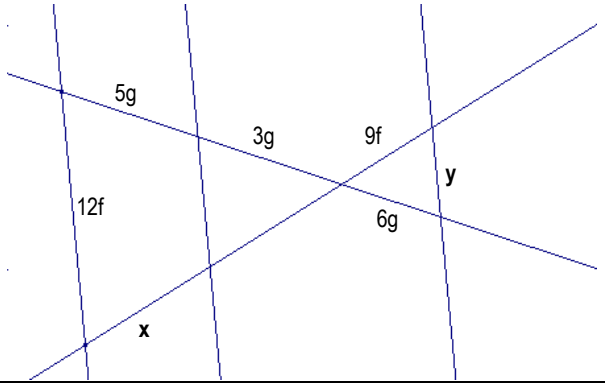
c)



d)



e)



3. Ein Mensch von einer Grösse von 1.69 m wird von einem Scheinwerfer beleuchtet.

a. Der Schatten hat eine Länge von 3.5 m und der Scheinwerfer ist in einer Höhe von 6 m befestigt. Berechne, wie weit der Scheinwerferständer vom Menschen entfernt steht (Bodenlinie)

b. Der Scheinwerfer steht 15m Bodenlinie vom Menschen entfernt und ist in einer Höhe von 3.6m befestigt. Wie lange wird der Schatten?

Arbeite mit einer Skizze:

4. Löse die folgenden Aufgaben durch Konstruktion (Erstelle einen Konstruktionsbericht. Skizze wo nötig):

a) Konstruiere ein Rechteck, dessen Seitenlängen sich wie 4:5 verhalten und dessen Diagonale 5cm lang ist.

Skizze:

KB:

b) In einem Rhombus verhalten sich BC und BD wie 3:5. Die längere Diagonale im Rhombus misst 7cm. Konstruiere den Rhombus .

Skizze:

KB:

c) Im rechtwinkligen Trapez verhalten sich die beiden Parallelseiten wie 3:2. Die Höhe des Trapezes verhält sich zur kürzeren Parallelseite wie 2:1. Die zweite Schrägseite im Trapez misst 5.5cm. Konstruiere das Trapez.

Skizze:

KB:

d) Ein spitzwinkliges Dreieck ABC (Basis AB) hat einen Winkel $\beta = 65°$. Die Basis AB verhält sich zur Seite BC wie 5:4. Die Höhe h_c misst 5 cm. Konstruiere das Dreieck.

Skizze:

KB:

e) Der Höhenfusspunkt eines rechtwinkligen Dreiecks teilt die Hypotenuse im Verhältnis 4:5. Die kürzere Kathete misst 4.5cm. Konstruiere das Dreieck.

Skizze:

KB:

5. Berechne die gesuchten Längen auf mm genau. Die gegebenen Dreiecke ABC und A'B'C' sind ähnlich.

a) Gegeben: AB = 4cm, Gesucht: AC
BC = 2cm, B'C'
A'B' = 6.5cm
A'C' = 4.5cm.

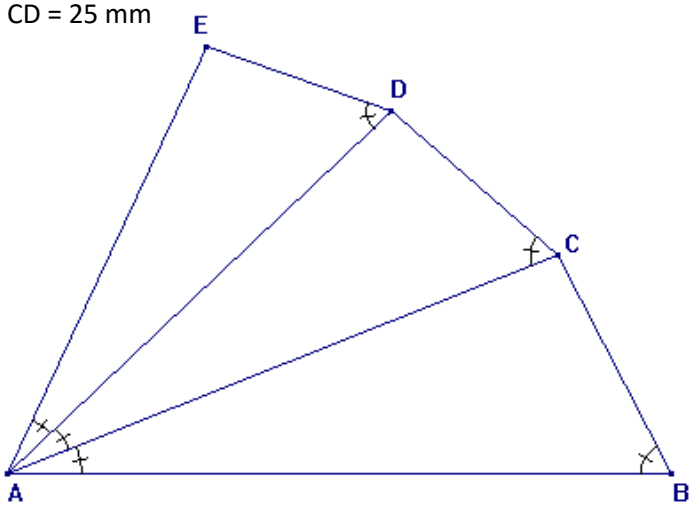
Skizze:

b) Gegeben: BC = 15 cm, Gesucht: B'C'
h_a' =18 cm, AB
A'B' = 21cm
$A_{\Delta ABC} = 90cm^2$.

Skizze:

6. Berechne die Länge des Streckenzuges ABCDE

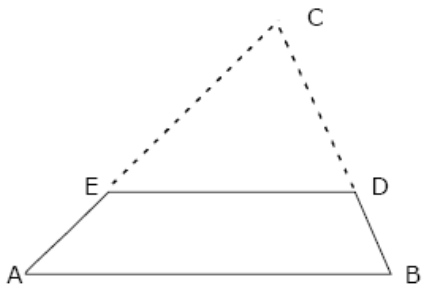
AC = 45 mm
AD = 36 mm
CD = 25 mm



7. Berechne die folgenden Aufgaben:

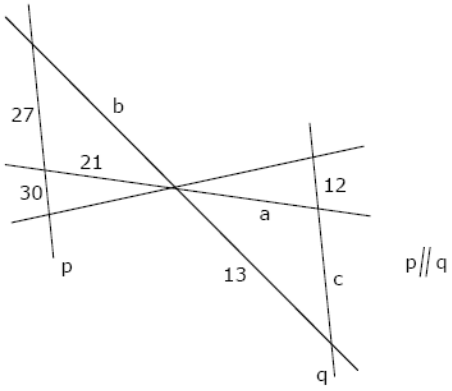
a) Einem Dreieck wurde die Spitze abgeschnitten. Das Reststück in Form eines Trapezes hat Parallelen von 15cm und 18cm, seine Höhe ist 4.5cm. Wie hoch war das Dreieck? (Berechne die Höhe h_c)

Situation:



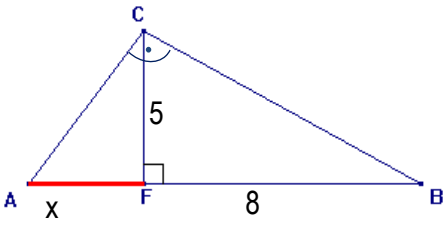
b) Berechne die Zahlwerte für a, b und c. (Die Geraden p und q sind parallel)

Situation:



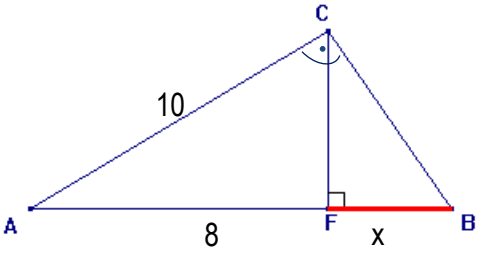
c) Berechne den Zahlwert für die markierte Strecke x (Einheit: cm)

Situation:



d) Berechne den Zahlwert für die markierte Strecke x (Einheit: cm)

Situation:



8. Löse die folgenden Aufgaben:

a) Zwei ähnliche Vierecke haben Flächen von 3 und 9. Bestimme das Verhältnis der Seitenlängen und den Streckfaktor.

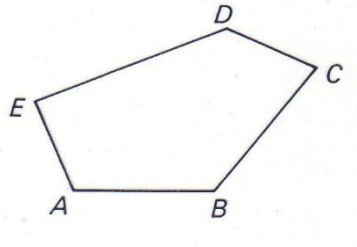
b) Die Seitenlängen zweier Quadrate verhalten sich wie 3 : 5, wobei das grössere einen Flächeninhalt von 100 cm^2 hat. Welche Seitenlänge hat das kleinere der beiden Quadrate?

c) Das Verhältnis von je zwei entsprechenden Seiten von zwei ähnlichen Rechtecken beträgt 3 : 6. Der Flächeninhalt des grösseren, 42cm langen Rechtecks beträgt 504cm^2.

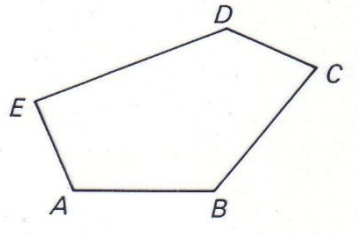
   a. Berechne Länge und Breite des kleineren Rechtecks
   b. Berechne das Flächenverhältnis der beiden Rechtecke.

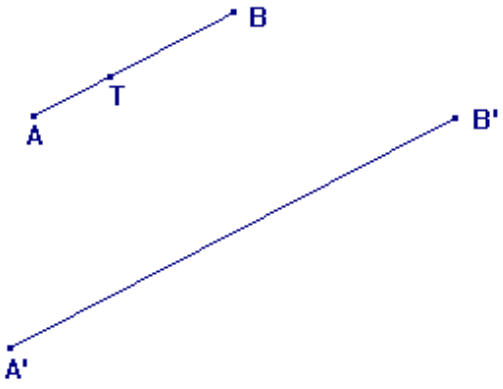
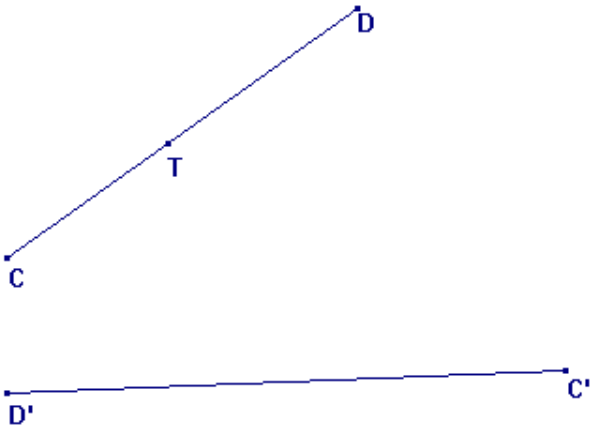
9. Konstruiere eine Figur, deren Flächeninhalt

a) viermal so gross ist, wie derjenige der gegebenen Figur



b) zweimal so gross ist, wie derjenige der gegebenen Figur



10. Teile die Bildstrecke im gleichen Verhältnis wie die Originalstrecke:

a) b)