

Name: \_\_\_\_\_



# Mathematik-Dossier

## 3 – Potenzen, Wurzeln und Binome

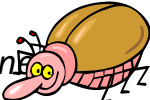
(angepasst an das Lehrmittel Mathematik 3)

### Inhalt:

- Potenzen und Wurzeln (speziell dritte Potenzen und dritte Wurzeln)
- Grosse Zahlen (Wissenschaftliche Schreibweise, Dezimalschreibweise)
- Das Produkt von Binomen
- Die Binomischen Formeln
- Kürzen von Bruchtermen
- Gleichungen mit Hilfe von Binomen

### Verwendung:

*Dieses Dossier dient der Repetition und Festigung innerhalb der obgenannten Themen. Es beinhaltet einen kurzen Theorie-Teil, sowie verschiedene Übungen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.*

einfache Aufgaben sind mit einer 

gekennzeichnet

schwierigere Aufgaben sind mit einer 

gekennzeichnet.

*Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden.*

**Wichtig:** Die Aufgaben erfordern ein konzentriertes Vorgehen. Es ist daher sinnvoll, mindestens während 15 Minuten am Stück daran zu arbeiten, mit Vorteil bearbeitest du ein ganzes Kapitel aufs Mal.

# 1. Potenzen und Wurzeln

Bereits im Thema „Die Welt der Rationalen Zahlen (siehe auch Dossier 2-1)“ haben wir uns über Potenzen und Wurzeln Gedanken gemacht. Wir haben dort die Potenzen im Allgemeinen, speziell aber die Quadratzahlen (2.Potenzen) und ihre Gegenoperation, die zweiten Wurzeln (Quadratwurzeln) angeschaut.

Selbstverständlich haben aber auch höhere Potenzen (z.B.  $a^3$ ,  $a^4$ ,  $a^5$  etc.) jeweils eine Gegenoperation, die als 3. Wurzel, 4. Wurzel, 5. Wurzel etc. bezeichnet wird. Schauen wir als Beispiel einmal genauer hin:

## 1.1 Die dritte Potenz

Eine Basis mit dem Exponenten 3 bedeutet, dass eine Zahl dreimal mit sich selber multipliziert wird (dies wird als dritte Potenz bezeichnet).

Es gilt also:  $a^3 = a \bullet a \bullet a$  („a hoch drei“ oder eben: „die dritte Potenz von a“)

*a ist Basis, 3 ist Exponent und zeigt an, wie oft die Basis mit sich selber multipliziert wird.*

Mit Zahlen gilt:  $5^3 = 5 \bullet 5 \bullet 5 = 125$

mögliche Bedeutung: Ein Würfel mit Kantenlänge 5 hat ein Volumen von  $5^3 = 125$ . Wir können also feststellen, dass die Berechnung eines Würfelvolumens bei bekannter Kantenlänge relativ einfach ist.

## 1.2 Die dritte Wurzel (als Umkehrung der dritten Potenz)

Schwieriger wird die Berechnung, wenn ich ein Würfelvolumen kenne, die Kantenlänge aber berechnen muss. Dann nämlich bin ich gezwungen, die Rechnung sozusagen rückwärts zu machen. Wenn das Würfelvolumen  $64 \text{ cm}^3$  beträgt, dann weiss ich, dass eine einzige Zahl, die ich dreimal mit sich selber multipliziere genau 64 ergeben muss. Also frage ich mich:

„Für welche Zahl gilt:  $x \bullet x \bullet x = 64$ ?“ oder eben „Für welches x gilt:  $x^3 = 64$ ?“

Es gilt also:  $\sqrt[3]{64} = 4$ , weil  $4^3 = 64$  („Die dritte Wurzel von 64 ist 4“)

Eine allgemein gültige Regel ist zudem:  $(\sqrt[3]{c})^3 = c$

Dabei kann ich jetzt ausführlich probeln, etwas probieren – oder ich verwende die gleiche Operation, die ich schon bei den Quadratzahlen angewandt habe: Die Umkehrung der Potenzrechnung ist die Wurzelberechnung.

Im Unterschied zur Quadratwurzel (zweite Wurzel) brauche ich jetzt einfach die „dritte Wurzel“ (weil meine Zahl ja in der dritten Potenz vorkommt). Die dritte Wurzel ist in der Regel nicht mehr mit dem Kopf zu berechnen (mit wenigen Ausnahmen). Dafür verwenden wir den Taschenrechner – je nach Modell ist die Bedienung etwas unterschiedlich, schau doch dazu in der Gebrauchsanweisung oder Frage deinen Lehrer oder deine Lehrerin.

Für die Berechnung von höheren Wurzeln brauche ich folgende Tastenkombination:

### 1.3 Potenzen mit ganzen Exponenten:

Bei der Potenz gibt der Exponent an, wie oft die Basis mit sich selber multipliziert wird. Das ist für uns mittlerweile klar, einfach und verständlich.

$$\Rightarrow 5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

Etwas weniger einfach vorstellbar ist nun das Problem, wenn der Exponent negativ ist.

Bei Potenzen, mit negativem Exponenten gilt:

$$5^{-4} = \frac{1}{5^4}$$

und allgemein:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$



### 1.4 Regeln für das Rechnen mit Potenzen (Repetition)

Ergänzend für die bereits besprochenen Potenzrechnungen aus dem Dossier „2-1 Die Welt der rationalen Zahlen“ können wir gewisse Rechnungen mit Potenzen vereinfachen.

#### 1.4.1 Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis

Werden zwei Potenzen mit gleicher Basis miteinander multipliziert, so können die Exponenten addiert werden. Die Basis bleibt bestehen. Bei der Division werden die Exponenten entsprechend subtrahiert.

Beispiele:

$$5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$$

$$5^{-4} \cdot 5^{-5} = 5^{-4+(-5)} = 5^{-9}$$

$$5^4 : 5^3 = 5^{4-3} = 5^1$$

$$5^6 : 5^{-9} = 5^{6-(-9)} = 5^{15}$$

Allgemeine Regeln:  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

**Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis**

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

**Division von Potenzen mit gleicher Basis**

#### 1.4.2 Allgemeine Potenzregeln (Repetition):

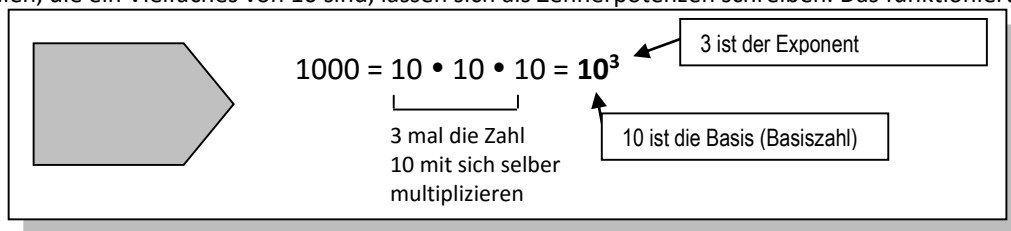
Multiplikation von zwei Potenzen:  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$  („Ausklammern“)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
 („Auspotenzieren“)

Division von zwei Potenzen:  $a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a:b)^n$

## 1.5 Potenzschreibweise im 10er-System (Dezimalsystem): Wissenschaftliche Schreibweise

Alle Zahlen, die ein Vielfaches von 10 sind, lassen sich als Zehnerpotenzen schreiben. Das funktioniert so:



Bei Zehnerpotenzen beschreibt der Exponent, wie viele Nullen die Zahl hat.

|               |                                      |                        |                        |
|---------------|--------------------------------------|------------------------|------------------------|
| $10^0 = 1$    | (Definition, eine 1 mit 0 Nullen...) | $10^6 = 1$ Mio         | (eine 1 mit 6 Nullen)  |
| $10^1 = 10$   | (eine 1 mit 1 Null)                  | $10^9 = 1$ Mia         | (eine 1 mit 9 Nullen)  |
| $10^2 = 100$  | (eine 1 mit 2 Nullen)                | $10^{12} = 1$ Billion  | (eine 1 mit 12 Nullen) |
| $10^3 = 1000$ | (eine 1 mit 3 Nullen)                | $10^{18} = 1$ Trillion | (eine 1 mit 18 Nullen) |

Die Zehnerpotenzen können natürlich für jede beliebige Zahl verwendet werden:

$$6000 = 6 \cdot 1000 = 6 \cdot 10^3 \quad \quad 6 \text{ Millionen} = 6 \cdot 1 \text{ Million} = 6 \cdot 10^6$$

Die Zahl 345000 ist somit  $345 \cdot 1000 = 345 \cdot 10^3$

Nun ist für den Vergleich von Zahlen übersichtlicher, wenn sie mit einem möglichst **kleinen Zahlteil** und einem möglichst **grossen Exponenten** geschrieben werden können. (= Wissenschaftliche Schreibweise). Man arbeitet dabei mit Kommastellen. Es gilt dabei

$$345000 = 345 \cdot 1000 = 345 \cdot 10^3 = 34,5 \cdot 10^4 = 3,45 \cdot 10^5$$

Das Verschieben des Komma nach links hat somit pro Stelle einen zunehmenden grösseren Exponenten zur Folge und umgekehrt.

$$345000 = 345 \cdot 10^3 = 34,5 \cdot 10^4 = 3,45 \cdot 10^5$$

Komma 1 Stelle nach links → Exponent + 1

Komma 1 Stelle nach links → Exponent + 1

## 1.6 Begriffe von Giga bis Nano

Im täglichen Gebrauch werden Grössen häufig durch ihre Benennung gekennzeichnet. So haben wir auf dem Memorystick „Giga-Byte“ oder gar „Terra-Byte“ drauf, unser Imprägnierungsspray hat „Nano-Technologie“ und den Zucker kaufen wir in einer „Kilo-Packung“. Dahinter versteckt sich gewissermassen die wissenschaftliche Schreibweise. Ein Kilogramm sind ja bekanntlich 1000 Gramm, also  $1 \cdot 10^3$  Gramm. Mit der Abkürzung „kilo“ ist eigentlich  $10^3$  gemeint. Deshalb also das Kilo ( $10^3$ ) – Gramm. Entsprechend bedeuten alle anderen gängigen Abkürzungen ebenfalls eine 10er – Potenz. Hier die Übersicht:

| Name  | Zahlwert      | Kürzel | Zehnerpotenz               |                                                                               |
|-------|---------------|--------|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| Terra | 1 Billion     |        | $10^{12}$                  |                                                                               |
| Giga  | 1 Milliarde   | G      | $10^9$                     | Kapazität einer DVD = 4.7 GB                                                  |
| Mega  | 1 Million     | M      | $10^6$                     |                                                                               |
| Kilo  | 1 Tausend     | K      | $10^3$                     |                                                                               |
| Hekto | 1 Hundert     | H      | $10^1$                     |                                                                               |
| Dezi  | 1 Zehntel     | d      | $10^{-1} = \frac{1}{10^1}$ |                                                                               |
| Zenti | 1 Hundertstel | c      | $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$ |                                                                               |
| Milli | 1 Tausendstel | m      | $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$ |                                                                               |
| Mikro | 1 Millionstel | μ(mü)  | $10^{-6} = \frac{1}{10^6}$ | Durchmesser eines menschlichen Haares = 70 μm (Mikrometer)                    |
| Nano  | 1 Millardstel | n      | $10^{-9} = \frac{1}{10^9}$ | In einem Metallstück liegen vier Atome auf einer Strecke von ca. 1 Nanometer. |



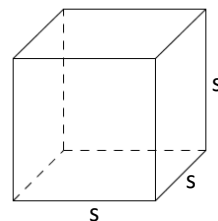
## Übungen Potenzen, Wurzeln, Grosse Zahlen

### 1. Rechne aus:

- a)  $\sqrt[3]{59.57}$  \_\_\_\_\_
- b)  $\sqrt[3]{656.589}$  \_\_\_\_\_
- c)  $\sqrt[3]{125.125}$  \_\_\_\_\_
- d)  $\sqrt[3]{30.8994}$  \_\_\_\_\_
- e)  $\sqrt[3]{\frac{30}{1256}}$  \_\_\_\_\_
- f)  $\sqrt[5]{\frac{(9.125+23)^2+25}{1.3588}}$  \_\_\_\_\_

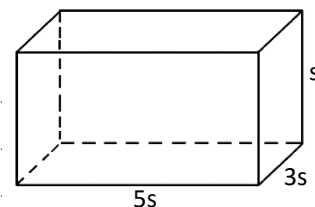
### 2. Löse die Satzaufgaben:

- a) Ein Würfel hat ein Volumen von  $42'875 \text{ cm}^3$ . Berechne die Kantenlänge  $s$  des Würfels.

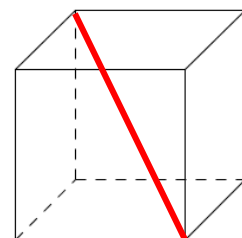


- b) Ein Würfel ist mit 45025 Litern Wasser genau zur Hälfte gefüllt. Das Wasser wird nun in einen kleineren Würfel umgeleert. Der kleinere Würfel wird vollständig gefüllt. Berechne die Kantenlänge des kleinen und des grossen Würfels.

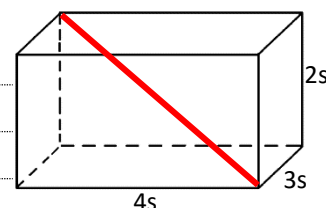
- c) Ein Quader hat ein Volumen von  $73'695 \text{ cm}^3$ . Berechne die Länge aller drei Quaderkanten.



- d) Ein Würfel hat ein Volumen von  $2197 \text{ cm}^3$ . Berechne die Länge seiner Körperdiagonalen.



- e) Ein Quader hat ein Volumen von  $17496 \text{ cm}^3$ . Berechne die Länge aller drei Quaderkanten und die Länge der eingezeichneten Körperdiagonalen.



### 3. Löse jede Formel nach der Variablen s auf:

- a)  $V = \frac{4\pi s^3}{5}$   $s =$   
 .....  
 b)  $V = \frac{s^3}{3} - 4$   $s =$   
 .....  
 c)  $V = \frac{3\pi s^3}{4} + 2s^3$   $s =$   
 .....

### 4. Berechne die folgenden Potenzen – schreibe deine vereinfachte Rechnung auf!

Bsp.:  $4^3 \cdot 4^{-6} = 4^{3+(-6)} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

- a)  $3^{-2} \cdot 3^{15}$  .....  
 b)  $14^3 \cdot 35^3$  .....  
 c)  $7^6 : 7^3$  .....  
 d)  $14^9 : 14^{-3}$  .....  
 e)  $11^{13} \cdot 11^{15}$  .....  
 f)  $0.003^5 \cdot 0.003^{-2}$  .....

### 5. Schreibe die folgenden Terme in anderer Form (vereinfacht!)

- a)  $(15 \cdot 7)^3$  .....  
 b)  $(abc)^4$  .....  
 c)  $c^{14} : c^8$  .....  
 d)  $3c^3 + 12c^3$  .....  
 e)  $\frac{4x^6}{3} \cdot \frac{9x^3}{8}$  .....  
 f)  $\frac{4x^6}{3} : \frac{9x^4}{24}$  .....

### 6. Bestimme die Anzahl der Nullen:

- a) 100 Millionen .....  
 b) 700'000 Trillionen .....  
 c) 39 Billionen .....  
 d) 80000 Milliarden .....

### 7. Schreibe die folgenden Zahlen als Potenz mit der Basis 10 (also als Zehnerpotenz)

Bsp.:  $10'000 = 10^4$

- a) 100'000 .....  
 b) 1'000 .....  
 c) 10'000'000'000'000 .....  
 d) 100'000'000'000'000'000 .....  
 e) 1 .....

## 8. Schreibe die Zahl in der wissenschaftlichen Schreibweise.

Bsp.:  $1'230'000'000$        $123 \cdot 10^7 = 1,23 \cdot 10^9$

a)  $25'987'000$

b)  $268'000'000$

c)  $23'400'000'000$

d) 763.5 Milliarden

e) 79,26 Millionen kg

f)  $168.34 \text{ km}^3$

g) 0.259 m

h) 5687.45 s

## 9. Schreibe die Zahl ohne die Zehnerpotenzen

Bsp.:  $35 \cdot 10^6$        $= 35 \cdot 1'000'000 = 35'000'000$

a)  $8 \cdot 10^6$

b)  $98 \cdot 10^7$

c)  $15 \cdot 10^3$

d)  $1,23 \cdot 10^5$

e)  $45 \cdot 10^7$

f)  $1586 \cdot 10^{-5}$

g)  $125.248 \cdot 10^{-3}$

## 2. Rechnen mit Binomen

Sicher erkennst du im Wort Binomen den Ausdruck „Bi“, was soviel wie „zwei“ bedeutet. Ein Binom ist also ein Term, der aus zwei Gliedern besteht. Daneben kommen in diesem Kapitel auch dreigliedrige Terme vor (sie heissen dann: Trinome, weil Tri = Drei). Natürlich weisst du noch ganz gut, wie das Distributivgesetz funktioniert und bist damit gerüstet, wieder in die Algebra einzusteigen. Denn mit dem Ausmultiplizieren (also Distributivgesetz) ist das Multiplizieren zweier Binome verwandt.

### 2.1 Das Produkt von zwei Binomen

Wenn du dich ans Distributivgesetz zurückerinnerst, weisst du noch, dass z.B.

$$8 \bullet (5+4) = 8 \bullet 5 + 8 \bullet 4 = 40 + 32 = 72$$

Anstelle der Zahl 8 könnten wir durchaus auch  $5+3$  schreiben, und das Ergebnis müsste noch immer 72 sein. Und schon haben wir ein Produkt von zwei Binomen (zwei zweigliedrigen Termen): Ersetzen wir die 8 immer durch  $(5+3)$  so ergibt sich folgende Rechnung:

$$(5+3) \bullet (5+4) = (5+3) \bullet 5 + (5+3) \bullet 4 = 5 \bullet 5 + 3 \bullet 5 + 5 \bullet 4 + 3 \bullet 4 = 25 + 15 + 20 + 12 = 72$$

Von vorne her gelesen gibt also  $(5+3) \bullet (5+4) = 5 \bullet 5 + 5 \bullet 4 + 3 \bullet 5 + 3 \bullet 4$

(→ Wir multiplizieren jede Zahl von der vorderen Klammer mit jeder Zahl der hinteren Klammer)

Schreiben wir anstelle von Zahltermen allgemeine Algebra-Terme, so stellt sich uns die Aufgabe, die beiden Binome  $(a+b)$  und  $(c+d)$  miteinander zu multiplizieren. Dies funktioniert entsprechend gleich:

$$(a+b) \bullet (c+d) = ac + ad + bc + bd$$

**Regel:** Jedes Glied des ersten Binoms mit jedem Glied des zweiten Binoms multiplizieren. Die Vorzeichen sind dabei mitzunehmen.

Da verschiedene Vorzeichen vorkommen ergeben sich vier mögliche Kombinationen:

$$(a+b) \bullet (c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b) \bullet (c-d) = ac - ad + bc - bd$$

$$(a-b) \bullet (c-d) = ac - ad - bc + bd$$

$$(a-b) \bullet (c+d) = ac + ad - bc - bd$$

(weil bei  $-d$  das Vorzeichen mitgenommen wird, also  $a \bullet -d$  und  $b \bullet -d$ )

(Vorzeichen mitnehmen, also  $a \bullet -d = -ad$ ;  $-b \bullet c = -bc$  und  $-b \bullet -d = +bd$ )

(Vorzeichen mitnehmen, also  $-b \bullet c = -bc$  und  $-b \bullet d = -bd$ )

Allgemein:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

## 2.2 Quadratische Trinome in ein Produkt von Binomen verwandeln

Interessant ist es, wenn man Trinome in ein Produkt von Binomen verwandelt (und umgekehrt). Kommt dabei eine Variable (z.B. x) in beiden Binomen vor, gibt es einen ganz einfachen Tipp:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + bx + ax + ab = x^2 + x(a+b) + ab$$

→ durch Ausklammern von x in den mittleren zwei Gliedern

Summe (a+b)

Produkt a • b

Es ist also zu erkennen, dass zuerst  $x^2$  vorkommt, dann **x mal die Summe der beiden Zahlen** und **zum Schluss das Produkt der beiden Zahlen**. Dies machen wir uns zu Nutze, wenn wir aus einem Trinom ein Binom machen möchten.

### 2.2.1 Beispiel 1:

$$x^2 + 6x + 5 = (x \quad)(x \quad) \rightarrow \text{Die gesuchten Zahlen müssen als Produkt +5, als Summe +6 haben.}$$

→ Beginnen wir mit dem Produkt, können wir die Möglichkeiten auflisten:

a) **Wie kann man als Produkt von zwei Zahlen +5 erreichen?**

$$\begin{aligned} +5 &= +5 \cdot +1 \\ &= -5 \cdot -1 \end{aligned}$$

b) **Überprüfen wir die Summe:**

$$\begin{aligned} (+5) + (+1) &= +6 \\ (-5) + (-1) &= -6 \end{aligned}$$

→ Das passt!

Also können wir schreiben:  $x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$  [auch korrekt ist  $(x + 1)(x + 5)$ ]

### 2.2.2 Beispiel 2:

$$a^2 - 10a + 24 = (a \quad)(a \quad) \rightarrow \text{Die gesuchten Zahlen haben das Produkt +24 und die Summe -10.}$$

→ Beginnen wir mit dem Produkt, können wir die Möglichkeiten auflisten:

a) **Wie kann man als Produkt von zwei Zahlen +24 erreichen?**

$$\begin{aligned} +24 &= +24 \cdot +1 \\ &= +12 \cdot +2 \\ &= +6 \cdot +4 \\ &= +3 \cdot +8 \\ &= -24 \cdot -1 \\ &= -12 \cdot -2 \\ &= -6 \cdot -4 \\ &= -3 \cdot -8 \end{aligned}$$

b) **Überprüfen wir die Summe:**

$$\begin{aligned} (+24) + (+1) &= +25 \\ (+12) + (+2) &= +14 \\ (+6) + (+4) &= +10 \\ (+3) + (+8) &= +11 \\ (-24) + (-1) &= -25 \\ (-12) + (-2) &= -14 \\ (-6) + (-4) &= -10 \\ (-3) + (-8) &= -11 \end{aligned}$$

→ das passt!

Also können wir schreiben:  $a^2 - 10a + 24 = (a - 6)(a - 4) = (a - 4)(a - 6)$

### 2.2.3 Beispiel 3 (etwas schwierigere Problemstellung)

$8x^2 - 56x - 144 \rightarrow$  Ein Problem stellt sich, da 8 keine Quadratzahl ist. Das heisst, dass wir nicht einfach zwei Klammern mit einem x am Anfang schreiben können (die miteinander multipliziert ja  $8x^2$  geben müssten). Hier behelfen wir uns mit dem, was wir schon wissen und können: Das Distributivgesetz. Glücklicherweise können wir aber 8 aus allen drei Gliedern ausklammern. So können wir anschliessend mit dem gleichen Verfahren wie oben weiterfahren.

$$8x^2 - 56x - 144 = 8(x^2 - 7x - 18) = 8(x \quad)(x \quad) \rightarrow \text{Die Zahlen haben Produkt } -18 \text{ und Summe } -7.$$

$\rightarrow$  Beginnen wir mit dem Produkt, können wir die Möglichkeiten auflisten:

a) *Wie kann man als Produkt von zwei Zahlen -18 erreichen?*

$$\begin{aligned} -18 &= -18 \cdot +1 \\ &= -9 \cdot +2 \\ &= -6 \cdot +3 \\ &= +18 \cdot -1 \\ &= +9 \cdot -2 \\ &= +6 \cdot -3 \end{aligned}$$

b) *Überprüfen wir die Summe:*

$$\begin{aligned} (-18) + (+1) &= -17 \\ (-9) + (+2) &= -7 \\ (-6) + (+3) &= -3 \\ (+18) + (-1) &= +17 \\ (+9) + (-2) &= +7 \\ (+6) + (-3) &= +3 \end{aligned}$$

$\rightarrow$  das passt

Also können wir schreiben:  $8x^2 - 56x - 144 = 8(x^2 - 7x - 18) = 8(x - 9)(x + 2) = 8(x + 2)(x - 9)$

### 2.2.4 Beispiel 4 (besonders schwierige Problemstellung):

$9x^2 - 18x - 16 \rightarrow$  Hier kann nicht ausgeklammert werden, doch lässt sich auch dieses Trinom in ein Produkt von Binomen verwandeln. Man muss dabei aber die Entstehung von „Summe und Produkt“ genau studieren.

Es wird eine Form  $(3x \quad)(3x \quad)$  entstehen, denn anders lassen sich die  $9x^2$  nicht bilden. Um die Zahlen, nennen wir sie einmal a und b aber bestimmen zu können müssen wir das Produkt der Binomen genauer betrachten.

Hier lässt sich 3x ausklammern

$(3x + a)(3x + b) = 9x^2 + \underbrace{3bx + 3ax}_{\text{Summe (a+b) \cdot 3x}} + ab$

$= 9x^2 + 3x(a+b) + ab$ 

Summe (a+b)

Produkt a • b

Wir sehen also, dass der hinterste Teil des Trinomes unverändert das Produkt der Zahlen a und b darstellt, während der Mittelteil das Produkt aus der Summe (a+b) und 3x beträgt. Um in unserem Beispiel die beiden Zahlen a und b zu bestimmen, **müssen wir die Zahl (-18) also durch 3 dividieren** (weil die gesuchte Summe ja mit 3 multipliziert wird).

$$9x^2 - 18x - 16 = (3x \quad)(3x \quad) \rightarrow \text{Zahlen mit Produkt } -16 \text{ und Summe } -6 \text{ (-18:3!!) gesucht.}$$

$\rightarrow$  Beginnen wir mit dem Produkt, können wir die Möglichkeiten auflisten:

a) *Wie kann man als Produkt von zwei Zahlen -16 erreichen?*

$$\begin{aligned} -16 &= -16 \cdot +1 \\ &= -8 \cdot +2 \\ &= -4 \cdot +4 \\ &= +16 \cdot -1 \\ &= +8 \cdot -2 \end{aligned}$$

b) *Überprüfen wir die Summe:*

$$\begin{aligned} (-16) + (+1) &= -15 \\ (-8) + (+2) &= -6 \\ (-4) + (+4) &= 0 \\ (+16) + (-1) &= +15 \\ (+8) + (-2) &= +6 \end{aligned}$$

$\rightarrow$  Das passt!

Also können wir schreiben:  $9x^2 - 18x - 16 = (3x - 8)(3x + 2) = (3x + 2)(3x - 8)$

## 2.3 Anwendung in Gleichungen

Die Anwendung dieser Rechnungen in Gleichungen ist häufig. Dabei muss man schrittweise vorgehen und sich nicht durch die vielen Klammern und so weiter verwirren lassen. Zudem kommt hier die Auflösung von quadratischen Gleichungen wieder zum Einsatz, wobei zu beachten ist, dass bei **quadratischen Gleichungen zwingend eine Seite = 0 sein muss und die andere Seite in Produktschreibweise**. Dann kann man die einzelnen Faktoren herauspicken und = 0 setzen und schon hat man die Lösungen (**→ Fallunterscheidung**). Quadratische Gleichungen haben immer zwei Lösungen (manchmal fallen diese aber zusammen.)

Beispiel:

|                        |   |                           |                                                                 |
|------------------------|---|---------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $(2x - 4)(x + 6)$      | = | $(x + 7)(x + 7) - 57$     | Binomenprodukte ausrechnen (gem. Regel)                         |
| $2x^2 + 12x - 4x - 24$ | = | $x^2 + 7x + 7x + 49 - 57$ | Ordnen und vereinfachen                                         |
| $2x^2 + 8x - 24$       | = | $x^2 + 14x - 8$           | <b>Da <math>x^2</math> nicht wegfällt, alles auf eine Seite</b> |
|                        |   |                           | → $-x^2; -14x; +8$                                              |
| $x^2 - 6x - 16$        | = | 0                         | <b>In Produktschreibweise verwandeln</b>                        |
| $(x - 8)(x + 2)$       | = | 0                         | <b>Klammern einzeln = 0 setzen (Fallunterscheidung)</b>         |
| $x - 8 = 0$            | → | $x = 8$                   |                                                                 |
| $x + 2 = 0$            | → | $x = -2$                  |                                                                 |
|                        |   |                           | <b>Lösungen: <math>x_1 = 8</math> ; <math>x_2 = -2</math></b>   |



## Aufgaben „Produkt von zwei Binomen / Trinome in Binome verwandeln“



### 1. Multipliziere aus:

a)  $(r + 8)(s - 11) =$

b)  $(x + 3)(x - 8) =$

c)  $(19y + 3)(8 - 4y) =$

d)  $(x - 2)(x + 9) =$

e)  $(4y - 9)(6y + 8) =$

f)  $(a + 4)(a + 8) =$

g)  $(-5s + 3)(s - 3) =$

h)  $(c + 5)(c - 2) =$

### 2. Verwandle die Trinome in ein Produkt von Binomen (Faktorisiere):

a)  $x^2 - 3x + 2 =$

b)  $x^2 - 14x + 49 =$

c)  $y^2 - y - 72 =$

d)  $2x^2 + 8x + 6 =$

e)  $b^2 + 3b - 28 =$

f)  $5x^2 + 35x - 90 =$

g)  $16x^2 - 32x + 15 =$

h)  $m^2 - 16m + 55$



3. Bestimme die Lösungen jeder Gleichung (bestimme x)



a)  $(x + 5)(x - 7) = x(3 + x)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b)  $(x - 2)(6x - 17) = (2x - 1)(3x - 13)$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c)  $(x + 5)(x + 5) - 18 = (x - 4)(x + 7)$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

d)  $(x - 5)(x - 5) - 3(x + 1) = 10$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 3. Die drei Binomischen Formeln (Das Quadrat einer Summe bzw. einer Differenz sowie die Differenz von zwei Quadraten)

Aufbauend auf den oben besprochenen Umwandlungen von Produkten von Binomen in ein Trinom, resp. von Trinomen in ein Produkt von Binomen gibt es drei spezielle Formeln. Für jede Art von Gleichungen, Grundoperationen mit Bruchtermen, Kürzen von Bruchtermen etc. musst du die drei Binomischen Formeln auswendig in alle Richtungen kennen. Da geht nichts über üben, üben, üben. Und wer genug geübt hat, wird sich ab guten Noten und schnell erledigten Hausaufgaben erfreuen können. So einfach kann Algebra sein....

Alle drei Formeln sind eigentlich „nur“ Spezialfälle der Multiplikation von zwei Binomen.

1. Binomische Formel:  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

+ab + ab zusammenfassen

Aussen die Quadrate, innen das doppelte Produkt von a und b.

2. Binomische Formel:  $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

-ab - ab zusammenfassen

Aussen die Quadrate, innen das doppelte Produkt von a und b.

3. Binomische Formel:  $(a - b)(a + b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

-ab + ab zusammenfassen

Differenz von zwei Quadraten

**Übersicht über die drei Binomischen Formeln:**  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  (1. Binomische Formel)  
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  (2. Binomische Formel)  
 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  (3. Binomische Formel)



#### Beispiele:

$a^2 - 12a + 36 = (a - 6)^2$  → Vorne und hinten Quadratzahlen (von a und von 6). In der Mitte das **Doppelte Produkt** von a und 6, nämlich  $2 \cdot a \cdot 6 = 12a$ .  
 Wegen dem – vor dem Mittelteil: 2. Binomische Formel.

$x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$  → Vorne und hinten Quadratzahlen (von x und von 7). In der Mitte das **Doppelte Produkt** von x und 7, nämlich  $2 \cdot x \cdot 7 = 14x$ .  
 Wegen dem + vor dem Mittelteil: 1. Binomische Formel.

$25x^2 - 81 = (5x + 9)(5x - 9)$  → Die Differenz von zwei Quadratzahlen (von 5x und von 9). Kein Mittelteil. Somit ist es die 3. Binomische Formel.

$(2x + 4)(2x - 4) = 4x^2 - 16$  → Die beiden Klammern unterscheiden sich nur durch das Operationszeichen. Somit handelt es sich um die 3. Binomische Formel und man muss die Differenz der beiden Quadrate (von 2x und von 4) bilden.

$(5x + 3)^2 = 25x^2 + 30x + 9$  → Es handelt sich um die 1. Binomische Formel. Somit muss man die beiden Quadrate bilden (von 5x und von 3) und als Mittelteil das doppelte Produkt (also  $2 \cdot (+5x) \cdot (+3) = +30x$ ) einfügen

$(7x - 13)^2 = 49x^2 - 182x + 169$  → Es handelt sich um die 2. Binomische Formel. Somit muss man die beiden Quadrate bilden (von 7x und von 13) und als Mittelteil das doppelte Produkt (also  $2 \cdot (+7x) \cdot (-13) = (-182x)$ ) einfügen.



## Aufgaben „Die Binomischen Formeln“



### 1. Multipliziere aus und notiere hinten die Nummer der Binomischen Formel.

- a)  $(13 + y)^2$  = ..... . Binomische Formel
- b)  $(4d + 2)^2$  = ..... . Binomische Formel
- c)  $(5a - 4c)^2$  = ..... . Binomische Formel
- d)  $(5d+6c)(5d - 6c)$  = ..... . Binomische Formel
- e)  $(14x - 13y)(14x - 13y)$  = ..... . Binomische Formel
- f)  $(a\sqrt{8} - x\sqrt{2})^2$  = ..... . Binomische Formel
- g)  $(5s + 3)^2$  = ..... . Binomische Formel
- h)  $(3a - 4c)^2 =$  = ..... . Binomische Formel
- i)  $(5d + 2)^2 =$  = ..... . Binomische Formel
- k)  $(4h + 5i)(5i - 4h)$  = ..... . Binomische Formel

### 2. Verwandle die Trinome in ein Produkt von Binomen und notiere die Nummer der Binomischen Formel:



- a)  $x^2 - 4x + 4$  = ..... . Binomische Formel
- b)  $p^2 - 2pv + v^2$  = ..... . Binomische Formel
- c)  $16r^2 - 8r + 1$  = ..... . Binomische Formel
- d)  $9u^2 + 30u + 25$  = ..... . Binomische Formel
- e)  $q^2 - 0,5q - 0,36$  = ..... . Binomische Formel
- f)  $144x^2 - 225$  = ..... . Binomische Formel
- g)  $196s^2 - 289$  = ..... . Binomische Formel
- h)  $64a^2b^2 - 9c^2$  = ..... . Binomische Formel
- i)  $9p^2 + 6p + 1$  = ..... . Binomische Formel
- k)  $49x^2 - 28x + 4$  = ..... . Binomische Formel

3.

Löse die folgenden Gleichungen (bestimme x).

a)  $(x - 5)^2 - (3 - 5x) = 16$




---

---

---

---

---

b)  $(x - 4)(x + 4) = (2 - x)(x - 8)$




---

---

---

---

---

c)  $y^2 - 2(y + 4)^2 = (y - 1)^2 - 3y(y + 2)$




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

d)  $18x = x^2 + 81$




---

---

e)  $x^2 + 11x + 18 = 0$




---

---

---

f)  $(2x - 4)(x + 6) = (x + 7)^2 - 57$




---

---

---

---

---

g)  $2(y + 1)(y - 7) = 3(3 - y)^2 - (2y)^2 + 31$




---

---

---

---

---

---

---

---

h)  $(x - 5)^2 - 3(x + 1) = 10$




---

---

---

---

---

---

---

---

i)  $(3y - 2)(3y + 2) + 38y = (5y + 3)(y + 7)$




---

---

---

---

---

---

---

---

**4. Stelle eine Gleichung auf und löse sie:**

- a) Vergrößert man eine Zahl um 11, so ist das Quadrat der neuen Zahl um 913 grösser als das Quadrat der ursprünglichen Zahl. Berechne die ursprüngliche und die neue Zahl.




---

---

---

---

---

---

---

---

- b) Die Summe zweier Zahlen beträgt 45. Verkleinert man jede der beiden um 13, so beträgt die Differenz ihrer Quadrate 133. Berechne die beiden Zahlen.




---

---

---

---

---

---

---

---

## 4. Kürzen von Bruchtermen

Das gute alte Kürzen kommt wieder vor. Diesmal mit Binomen, mit Trinomen und mit all den bösen Dingen, die du inzwischen gelernt hast. Doch das Kürzen (oder besser die Regeln beim Kürzen) haben sich nicht verändert. Es gilt nach wie vor:

- Kürzen ist nur erlaubt, wenn Zähler und Nenner in Produktschreibweise stehen (→ „Nur der Dumme kürzt die Summe“).
- Für die Umformung können wir binomische Formeln, das Ausklammern oder das Verwandeln von Trinomen in ein Produkt von Binomen (mit Hilfe von Summe und Produkt der Zahlen) verwenden.

Beispiele:

$$\frac{36y^2 + 36y + 9}{6y + 3} = \frac{(6y + 3)^2}{6y + 3} = 6y + 3$$

Da nicht direkt aus der Summe gekürzt werden darf, muss zuerst mittels der 1. Binomischen Formel im **Zähler in Produktschreibweise verwandelt** werden. Erst jetzt darf bei **gleichen Faktoren gekürzt** werden.

$$\frac{8xy - 8yz}{8x^2y - 8yz^2} = \frac{8y(x - z)}{8y(x^2 - z^2)} = \frac{8y(x - z)}{8y(x - z)(x + z)} = \frac{1}{(x + z)}$$

3. Binomische Formel

Da nicht direkt aus der Summe gekürzt werden darf, muss zuerst mittels **Ausklammern** gearbeitet werden. Anschliessend entdecken wir im Nenner eine **3. Binomische Formel**, können diese in ein Produkt umschreiben und anschliessend **gleiche Faktoren kürzen**.

3. Binomische Formel →

$$\frac{(x^2 - y^2)(x + y)}{(x + y)^2} = \frac{(x + y)(x - y)(x + y)}{(x + y)^2} = (x - y)$$

Hier entdecken wir schnell die 3. Binomische Formel im Zähler, verwandeln die in ein Produkt von Binomen und können bereits **gleiche Faktoren kürzen**.

### Aufgaben „Kürzen von Bruchtermen“

1. Kürze die Bruchterme so weit wie möglich.

a)  $\frac{14x^2y + 35xy^2}{21xy} =$

b)  $\frac{a^2 - 9}{a^2 + 3a} =$

c)  $\frac{y^2 - 11y + 30}{2y^2 - 6y - 36} =$

d)  $\frac{18 - 3x}{x^2 - 12x + 36} =$

e)  $\frac{36 - y^2}{3y^2 + 36y + 108} =$

f)  $\frac{4a^2 - 20ab + 25b^2}{2ac - 5bc} =$