Name:

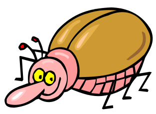
Mathematik-Dossier
7 – Gleichungen
(angepasst an das Lehrmittel Mathematik 3)

Inhalt:

- **Quadratische Gleichungen**
- **Gleichungen und Ungleichungen**
- **Lineare Gleichungssysteme**
- **Lineare Ungleichungssysteme**

Verwendung:

Dieses Dossier dient der Repetition und Festigung innerhalb der obgenannten Themen. Es beinhaltet einen kurzen Theorie-Teil, sowie verschiedene Übungen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden.

Wichtig: Die Aufgaben erfordern ein konzentriertes Vorgehen. Es ist daher sinnvoll, mindestens während 15 Minuten am Stück daran zu arbeiten, mit Vorteil bearbeitest du ein ganzes Kapitel aufs Mal.

1. Gleichungen und Ungleichungen

1.1 Gleichungslösung Grundidee (Repetition)

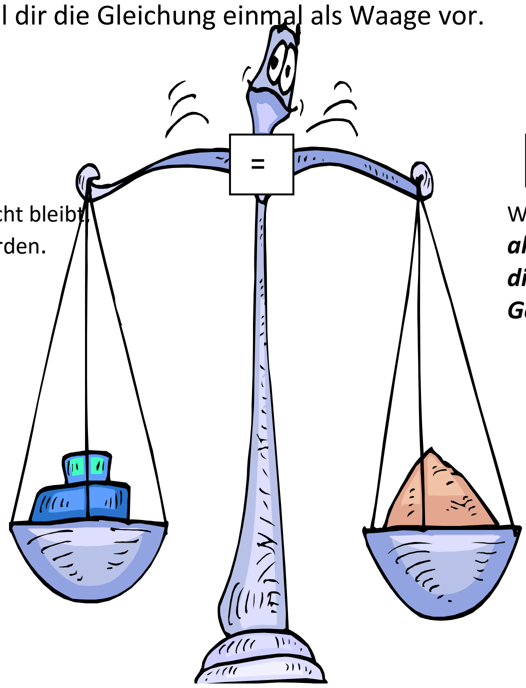
Zur Erinnerung: Gleichungen sind eine Art mathematisches Rätsel. Es geht darum herauszufinden, welche Zahlen du für die Unbekannte (Variable) einsetzen kannst, damit die Gleichung stimmt (also die Waage ausgeglichen steht). **Du suchst einen Zahlwert für x, welcher die rechte und die linke Seite der Gleichung gleichwertig macht.**

Dazu musst du die Variablenterme auf eine Seite bringen und die Zahlterme auf die andere Seite. Bei all diesen Umstellungen ist es aber wichtig, dass du immer auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Operation durchführst, da sonst die Waage aus dem Gleichgewicht gerät (oder eben die Terme nicht mehr gleichwertig sind). Stell dir die Gleichung einmal als Waage vor.

3x + 7	57 – 7x

damit die Waage im Gleichgewicht bleibt, müssen auch hier 7x addiert werden.

Wir wollen die x auf die andere Seite schaffen, ***also müssen wir hier 7x addieren! (Es stören die „-7x“ also müssen wir die Gegenoperation + 7x durchführen)***



3x + 7 **+ 7x**	57 – 7x **+ 7x**
10x + 7	57
10x + 7 **- 7**	57 **-7**
10x	50
10x **: 10**	50**:10**
x	5

Wir finden heraus, dass x = 5 ist, also die Zahl 5 als einzige Zahl die Gleichung erfüllt. Das können wir testen, in dem wir sie einsetzen.

3 • **5** + 7 = 57 - 7• **5,** also 15 + 7 = 57 – 35 oder besser gesagt 22 = 22.

1.2 Vorgehen zum Auflösen von Gleichungen (Repetition)

Allgemeines Lösungsschema:

1. Termvereinfachungen (und alle Nenner als Produkt schreiben)
2. Multiplikation mit dem Hauptnenner
3. Termvereinfachungen
4. Isolieren der Lösungsvariable durch Äquivalenzumformungen.
5. Lösung angeben

Sobald du aber multiplizierst, musst du jeden einzelnen Zähler links und rechts der Gleichung mit dem entsprechenden Faktoren multiplizieren. **Du erkennst diese einzelnen Stücke daran, dass sie durch ein „ + “ oder ein „ - “ getrennt sind**.

Beim Auflösen musst du erst im letzten Schritt dividieren (teilen), und zwar durch die Zahl, die vor dem x steht.

Lösungen angeben bei Ungleichungen: letzte Zeile z.B. x > 34

Bei Ungleichungen schreiben wir die Lösung je nach Ausgangslage so:

➔ **Gesucht sind „nur“ ganze Zahlen:** Wir schreiben in aufzählender Form: x = 35, 36, 37, 38, …

➔ **Gesucht sind alle möglichen Zahlen (auch Brüche):** Wir schreiben in beschreibender Form: Lösung: x > 34 (also die letzte Zeile der Ungleichung)

Beispiel:

$\frac{5x}{8} - \frac{2-x}{3}$	$= \frac{x}{2} + \frac{6x-3}{15}$	|| • HN (120)
$\mathbf{15} \cdot 5x \mathbf{- 40} \cdot (2 - x)$	$= \mathbf{60} \cdot x \mathbf{+ 8} \cdot (6x-3)$	|| Vereinfachen *(Vorsicht bei Vorzeichen!)*
$75x - 80 \mathbf{+} 40x$	$= 60x + 48x - 24$	|| Vereinfachen
$115x - 80$	$= 108x - 24$	|| $- 108x$
$7x - 80$	$= -24$	|| $+ 80$
$7x$	$= 56$	|| :7
x	$= 8$	Lösung: $x = 8$

2. Quadratische Gleichungen auflösen

Problematisch wird es dann, wenn wir mit dem uns bekannten und gewohnten Schema nicht mehr weiterkommen. Dies ist dann der Fall, wenn wir es nicht mehr mit linearen Gleichungen zu tun haben (also das x „nur" als x vorkommt), sondern mit quadratischen Gleichungen (wir also ein x^2 in der Gleichung haben, das sich nicht durch einfache Umformungen wegfällt). In diesem Fall müssen wir ein spezielles Vorgehen wählen, damit wir auch quadratische Gleichungen lösen können:

Allgemein lassen sich die Gleichungen wie folgt unterscheiden:

lineare Gleichungen:	$a\mathbf{x} + b = y$	(x kommt „nur" linear vor)
quadratische Gleichungen	$a\mathbf{x^2} + bx + c = 0$	(x kommt quadratisch vor)

Beim Auflösen von quadratischen Gleichungen nutzen wir folgenden Lehrsatz, den wir schon lange kennen:
⇨ **„Ein Produkt ist gleich Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist".**

2.1 Vorgehen für das Auflösen quadratischer Gleichungen

Was heisst das für uns? Wir müssen aus der quadratischen Gleichung also ein Produkt bilden (das können wir, weil wir ja aus einem Trinom ein Produkt aus Binomen machen können!). Danach den Lehrsatz befolgen und wir haben die Lösungen gefunden (quadratische Gleichungen haben immer zwei Lösungen).

1. **Wir setzen eine Seite der Gleichung = 0** (also müssen wir alles auf eine Seite der Gleichung bringen, damit „nur" 0 übrig bleibt.
2. Aus dem quadratischen Trinom müssen wir jetzt ein Produkt von Binomen machen (**Faktorisieren**)
3. Jetzt machen wir die sog. **Fallunterscheidung**: Wir setzen jeden Faktor (also jedes Binom) einzeln gleich Null, damit wir alle Lösungen finden können.
4. Die **beiden Lösungen geben wir an** und sind fertig.

Schauen wir uns anhand eines Beispiels das mal an:

$x^2 + 160$	=	$28x$	|| da wir x^2 nicht wegbringen, muss jetzt **alles auf eine Seite**. (➔ $- 28x$)
$x^2 - 28x + 160$	=	0	|| **faktorisieren**, damit aus dem Trinom ein PRODUKT von Binomen wird.
$(x - 20)(x - 8)$	=	0	|| Da das Produkt Null ist, wenn mind. ein Faktor Null ist, gehen wir die Faktoren (Klammern) einzeln durch. → **Fallunterscheidung**

Fall 1:	$x - 20$	$= 0$	Diese Gleichung ist linear und lässt sich nach x auflösen. (+20)
	x	$= 20$	
Fall 2:	$x - 8$	$= 0$	Diese Gleichung ist linear und lässt sich nach x auflösen. (+8)
	x	$= 8$	

Lösungen angeben: $\mathbf{x_1 = 20, x_2 = 8}$ **(Die Reihenfolge ist beliebig)**

3. Ungleichungen

Eine Ungleichung entsteht, wenn zwei Terme verglichen werden, die nicht gleich gross sind („Die Waage ist nicht im Gleichgewicht). Dies lässt sich einerseits an den Vergleichszeichen erkennen (<, ≤, > oder ≥) oder in einer Satzaufgabe dadurch, dass der Unterschied zwischen den beiden Seiten nicht bekannt ist.

- ⇨ „Das Sechsfache einer Zahl ist um 40 grösser, als die um 14 vergrösserte Zahl“ → Dies ist eine Gleichung, da wir wissen, dass sich das Sechsfache von der um 14 vergrösserten Zahl um genau 40 unterscheidet (wir können den Unterschied ausgleichen, dann sind beide Seiten gleich gross. → $6x - 40 = x + 14$)

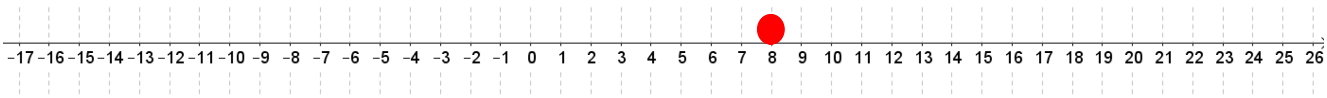
- ⇨ „Die Hälfte der um vier vergrösserten Zahl ist grösser als das Zweifache der um 6 verkleinerten Zahl“. → Hier wird eine Ungleichung beschrieben, denn wir wissen zwar, dass die Hälfte von (x+4) grösser ist als das Zweifache von (x-6), wir wissen aber eben nicht WIE VIEL GRÖSSER. Wir können den Unterschied nicht ausgleichen, da wir ihn nicht kennen.

Neben diesen Feinheiten aus dem Reich des Leseverstehens und des Satzaufbaus gibt es aber auch sonst noch gewisse Unterschiede zwischen Gleichungen und Ungleichungen. Dies betrifft die Anzahl Lösungen oder die grafische Darstellung von Lösungen:

3.1 Grafische Darstellung der Lösungsmengen bei Gleichungen

Bei einer Gleichung ist die Lösung immer genau eine einzelne Zahl (rsp. bei quadratischen Gleichungen zwei Zahlen). Diese lassen sich auf der Zahlengerade genau lokalisieren und einzeichnen.

Bei **x = 8** zeigt sich folgende Lösung auf der uns bestens bekannten Zahlengeraden:

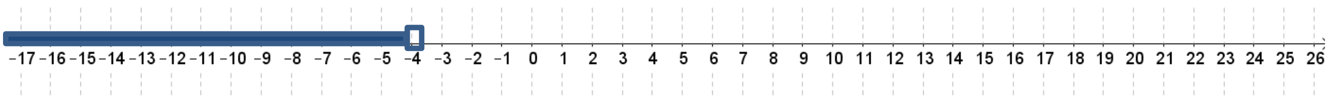


Gleichungen haben also genau definierte und quantifizierbare Lösungen.

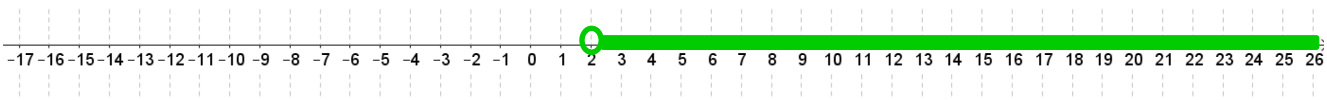
3.2 Grafische Darstellung der Lösungsmenge bei Ungleichungen

Die Lösung einer Ungleichung bezeichnet eigentlich immer „nur“ die Grenze, die je nach Vergleichszeichen gerade noch zur Lösung gehört (≥, ≤) oder eben nicht (<, >). Die möglichen Lösungen sind dann immer ein ganzer Abschnitt der Zahlengerade, weil ja ganz viele Zahlen eine richtige Lösung der Ungleichung bringen.

Hier zwei Beispiele:
Die Ungleichung liefert die letzte Zeile $x < -4$. Die Grenze ist also die Zahl -4. Da x jetzt ja kleiner ist als -4 (und -4 nicht dazu gehört), sind ja die Zahlen -5, -6, -7… rsp.alle Brüche oder Dezimalzahlen, die kleiner sind als -4 Lösung. Wir bezeichnen daher die Grenze mit einem Rechteck (bedeutet: gehört nicht dazu)



Für eine Ungleichung mit der letzten Zeile $x \geq 2$ zeichnen wir wieder die Grenze ein (also + 2). Da das x ja grösser oder gleich 2 ist, gehört diese Grenze dazu, sowie die Zahlen, die grösser sind als 2. Die Grenze bezeichen wir mit einem Kreisli (= gehört dazu).



Ungleichungen haben also unendlich viele Lösungen und definieren einen Bereich aus der Zahlengerade.

3.3 Wie werden Lösungen angegeben bei Ungleichungen?

Werden ausschliesslich ganzzahlige Lösungen gesucht, geben wir die Lösungsmenge aufzählend an:

z.B. bei der letzten Zeile $x < -4$: Lösungen: …, -7, -6, -5

Werden auch rationale Zahlen (Brüche) zugelassen, wird die Lösung beschreibend angegeben (ansonsten werden wir nie fertig mit dem Aufzählen…:

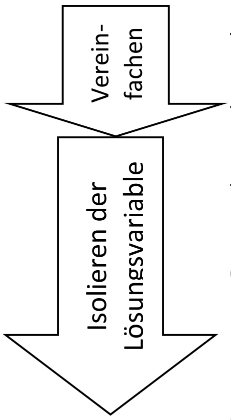
z.B. bei der letzten Zeile $x \geq 2$: Lösung: $x \geq 2$

3.4 Lösungsverfahren für Ungleichungen

Nachdem wir jetzt alle Fragen rund um die Lösung von Ungleichungen, sowie um die Unterschiede von Ungleichungen zu Gleichungen beantwortet haben, müssen wir noch klären, wie genau wir die Ungleichungen überhaupt auflösen können. Dabei dürfen wir beruhigt sein: Ungleichungen behandeln wir grundsätzlich gleich wie Gleichungen. Eine einzige Ausnahme müssen wir dabei beachten.

Lösungsschema für Ungleichungen:

1. beide Seiten der Ungleichung vereinfachen
2. Isolieren der Lösungsvariable durch Äquivalenzumformungen **:**
   x alleine auf eine Seite bringen. Um etwas „Störendes" wegzubringen, müssen wir jeweils die Gegenoperation durchführen. ➔ Vorsicht: **Bei der Division mit negativen Zahlen müssen wir das Zeichen umdrehen** (einzige Ausnahme im Vergleich zu den Gleichungen)
3. **Lösung** in **beschreibender Form angeben (Werden ganze Zahlen verlangt: aufzählend)**



7x - 6	<	4(4x – 6)	¦¦ vereinfachen
7x - 6	<	16x - 24	¦¦ + 6
7x	<	16x – 18	¦¦ - 16x
(- 9x)	<	(- 18)	¦¦ **: (- 9)**
x	**>**	2	

Division durch negative Zahl
➔ Zeichen umdrehen!

Lösung aufzählend: **Lösung: 3, 4, 5, 6, 7,….**
Lösung beschreibend: **Lösung: x > 2**

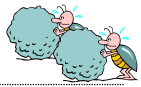
Aufgaben „Gleichungen und Ungleichungen“

1. Löse die folgenden Gleichungen / Ungleichungen und bestimme die Lösung. Gib die Lösung bei Ungleichungen in aufzählender und in beschreibender Form an:

a) $\frac{x+5}{4} - \frac{1-x}{6} = 4$

b) $\frac{3x-19}{15} - \frac{x}{18} = \frac{x-12}{10}$

c) $6 - \frac{x}{6} = \frac{x-7}{3} + 2x$



d) $\frac{2x-5}{3} < \frac{3x-1}{2}$

e) $\frac{x - 7}{4} - \frac{x - 4}{7} < \frac{3x - 18}{14} + 1$

f) $x - \frac{4 + 3x}{3} \geq \frac{x}{4} + \frac{1}{6}$

2. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $(x + 5)\,(x – 12) = 0$

b) $x^2 + 3x – 28 = 0$

c) $x^2 + 20x = -75$

d) $x^2 - 4(x + 15) = 4(1 - x)$

e) $(x - 7)2 + 3(x - 5) = (x - 3)^2 + 7(x - 1) - x^2$

3. Stelle eine Gleichung auf und löse sie anschliessend. Antworte in einem Satz.

a) In einem Basketballspiel beträgt die Punktedifferenz $\frac{1}{6}$ der Punkte des Verliererteams. Hätten die Verlierer nur vier Fünftel ihrer Punkte erzielt, so betrüge die Differenz sogar ganze 33 Punkte. Wie lautete der Punktestand zum Spielende?

b) Bei einer zweistelligen Zahl ist die Zehnerziffer um 3 kleiner als die Einerziffer. Die Quersumme der Zahl beträgt $\frac{5}{23}$ der Zahl selber. Wie heisst die Zahl ?

c) Dividiert man eine Zahl durch 5, erhält man gleich viel, wie wenn man eine Zahl, die um 6 kleiner ist als die Unbekannte, durch 8 dividiert. Wie heisst die unbekannte Zahl?

4. Gleichungssysteme – Schnittpunkte zweier Geraden

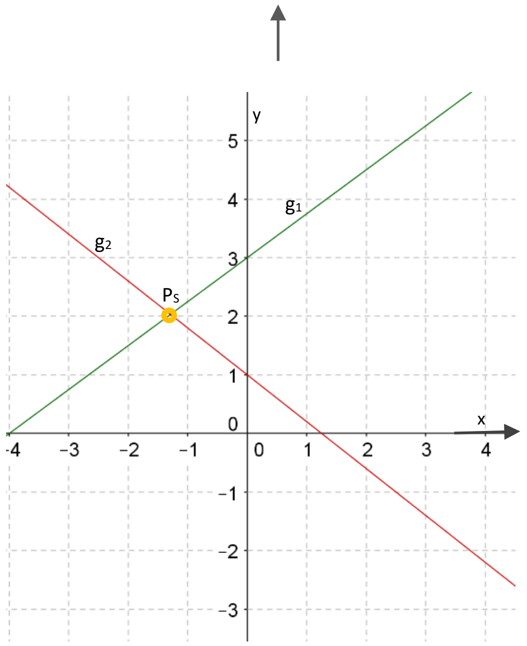
Erinnern wir uns zurück an das Thema „Funktionen". Dort haben wir uns vor allem mit der linearen Funktion beschäftigt und Geraden im Koordinatensystem eingezeichnet – oder die Funktionsgleichung herausgelesen. Finden wir nun im Koordinatensystem zwei Geraden, die sich schneiden, dann können wir sehen und hoffentlich auch verstehen, dass das Zahlenpaar (Koordinaten) des Schnittpunktes zu beiden Geraden gehört (also beide Geradengleichungen erfüllt).

Wenn sich im Koordinatensystem also zwei Geraden schneiden, so kann man ohne grosse Problem feststellen, dass dieser Schnittpunkt natürlich Element ist von beiden Geraden (auf beiden Geraden enthalten ist). Zudem hat der Schnittpunkt auch noch die besondere Eigenschaft, dass die x- und die y-Koordinate klar bestimmbar sind. **Somit ist der Schnittpunkt von zwei Geraden also jener Punkt, welcher in beiden Funktionsgleichungen für die genau gleiche x-Koordinate (Eingabe) auch das genau gleiche Ergebnis (Resultat, y-Koordinate) liefert**.

> ➔ *Der Schnittpunkt kann also so verstanden werden, dass er sowohl die Funktionsgleichung der ersten Gerade, als auch die Funktionsgleichung der zweiten Gerade erfüllt (also bei zwei unterschiedlichen Funktionsgleichungen für ein ganz bestimmtes x auch das gleiche y herauskommt.)*

Genau diese Eigenschaft macht man sich zu Nutze, wenn man zwei Geraden miteinander schneidet (man also rechnerisch von zwei Gleichungen eine gemeinsame Lösung sucht.)

Betrachten wir das folgende Beispiel. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist leider so gelegen, dass wir die Koordinaten nicht besonders gut oder genau ablesen können. Wir müssen den Schnittpunkt also berechnen:



Die beiden Geraden haben folgende Geradengleichungen:

$g_1 : y = \frac{3}{4}x + 3$

$g_2 : y = -\frac{4}{5}x + 1$ Der Schnittpunkt P_S gehört zu beiden Geraden!

Wir können oben erkennen, dass es für die Berechnung von y (Resultat) zwei unterschiedliche Wege gibt. Beide aber führen im Falles des Punktes P_S für die gleiche x-Koordinate zur gleichen y-Koordinate. Das können wir ausnutzen!

Deshalb wissen wir nämlich, dass $\frac{3}{4}x + 3 = -\frac{4}{5}x + 1$ sein muss. (weil ja für das gleich x (Startzahl) das gleich y (Ergebnis) entsteht.

Entsprechend lösen wir diese Gleichung auf und erhalten das x, welches die Startzahl für den Schnittpunkt P_S sein muss.

$\frac{3}{4}x + 3$	=	$-\frac{4}{5}x + 1$	|| • HN (20)
$15x + 60$	=	$-16x + 20$	|| +16x – 60
$31x$	=	-40	||:31
x	=	$-\frac{40}{31}$ (≈ 1.29)	

Dieses x setzen wir jetzt in eine der Gleichungen ein und erhalten das passende y:

Gleichnamig machen

(hier in 1.Gleichung): $y = \frac{3}{\cancel{4}} \bullet \frac{(-\cancel{40})}{31} + 3 = \frac{-30}{31} + 3 = \frac{-30 + 93}{31} = \frac{63}{31}$ (≈ 2.03)

Koordinaten des Schnittpunktes $P_S = (-\frac{40}{31} / \frac{63}{31})$

(Das stimmt mit der grafischen Lösung überein!)

4.1 Was ist ein Gleichungssystem?

Sobald wir nach gemeinsamen Lösungen von mehr als einer Gleichung suchen, sprechen wir von einem **Gleichungssystem**. Die beteiligten Gleichungen werden dabei untereinander geschrieben und mit einem senkrechten Strich links und rechts gekennzeichnet. So wird gezeigt, dass die Gleichungen „zusammengehören" – also sich schneiden. In unserem Fall betrachten wir hier „nur" lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen.

Das oben gezeigte Beispiel mit dem Schneiden von zwei Geraden ist also ein Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + 3 \\ y = -\frac{4}{5}x + 1 \end{array} \right|$$

(Die erste Gleichung des Gleichungssystems)

(Die zweite Gleichung des Gleichungssystems)

Die Kennzeichnung als Gleichungssystem (die beiden senkrechten Linien) zeigen an, dass wir den Schnittpunkt der beiden Geraden suchen – oder anders gesagt: das x (Startzahl), das in beiden Gleichungen das gleiche y (Ergebnis, Zielzahl) produziert.

Für die Auflösung von Gleichungssystemen (mehr als eine Gleichung, in unserem Beispiel jeweils zwei Gleichungen, welche mit den gleichen Variablen funktionieren) gibt es mehrere Methoden.

4.2 Das Gleichsetzungsverfahren (wird v.a. beim Schneiden von zwei Geraden angewendet)

Folgende Geraden sind gegeben:

$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + 2 \\ y = (-2)x \end{array} \right|$$

Beachte, dass hier beide Male steht „y = "

Sucht man jetzt also den Schnittpunkt, ist die Überlegung die Folgende: Der Schnittpunkt liegt auf beiden Geraden. Somit kann ich der ersten Geraden entlang wandern, um zum Schnittpunkt zu gelangen. Ich kann aber auch der zweiten Geraden entlang wandern. Anders gesagt: Ob ich mit der ersten Geradengleichung oder mit der zweiten Geradengleichung rechne, ist egal. Der Schnittpunkt hat beide Male das gleiche x und das gleiche y. Deshalb können wir die **beiden Funktionsgleichungen** also **gleichsetzen.**

Sofern auf der einen Seite des „ = " in beiden Gleichungen **dasselbe steht (hier „y=")**, kann ich die beiden Geraden einfach gleich setzen und schreiben

entspricht y aus Gleichung 1		entspricht y aus Gleichung 2	
$\frac{1}{4}x + 2$	=	$(-2)x$	$\| \bullet$ HN (4)
$x + 8$	=	$(-8)x$	$\| - x$
8	=	$-9x$	$\| : -9$
$\left(-\frac{8}{9}\right)$	=	x	→ **Die x – Koordinate ist also $\left(-\frac{8}{9}\right)$**

Zum Berechnen der y-Koordinate muss jetzt die x-Koordinate in eine der beiden Gleichungen eingesetzt werden. Statt x schreibt man dann also den Wert, den man eben berechnet hat.

Das ausgerechnete x an Stelle der Variablen einsetzen

→*entweder* $\frac{1}{4} \bullet \left(-\frac{8}{9}\right) + 2$	$= y$	*oder*	$(-2) \bullet \left(-\frac{8}{9}\right)$	$= y$
$-\frac{8}{36} + 2$	$= y$		$\frac{16}{9}$	$= y$
$\frac{16}{9}$	$= y$	(gekürzt!)	→ **Die y- Koordinate ist also $\frac{16}{9}$.**	

➔ **Der Schnittpunkt S hat die Koordinaten $\left(-\frac{8}{9} \,/\, \frac{16}{9}\right)$**

4.3 Das Einsetzungsverfahren

Das Einsetzungsverfahren ist so etwas wie eine kleine „Maskerade“. Und zwar geht es darum, dass eine Variable, z.B. **y nichts anderes ist, als ein „verkleideter“ Term von x.** Die Bezeichnung y und der Term von x sind also genau gleich bedeutend. Somit kann dies im Gleichungssystem genutzt werden, indem man in der einen Gleichung die Verkleidung berechnet (z.B. y = ...) und anstelle der Verkleidung den Term von x in der zweiten Gleichung einsetzt. Das alles tönt jetzt eher kompliziert, darum zwei Beispiele:

<u>Beispiel 1 zum Einsetzungsverfahren:</u>

$$\left| \begin{array}{rl} 11x + y & = 36 \\ (-8x) + 9y & = (-211) \end{array} \right|$$

Aus dieser Gleichung möchten wir die „Verkleidung“ von y herausfinden!

➔ Aus der ersten Gleichung folgt (durch beidseitiges subtrahieren von 11x) :

$$y = 36 - 11x$$

Die **Variable y ist also gleichwertig mit dem Ausdruck 36 - 11x**. Dies nützen wir aus und setzen jetzt in der zweiten Gleichung anstelle von y den gleichwertigen Ausdruck ein und haben nur noch eine Variable in der Gleichung.

➔ Anstelle von (-8x) + 9y = (-211) schreiben wir also

Das y aus Gleichung 1 (nach der Umformung zu y = 36 – 11x)

$(-8x) + 9\,\mathbf{(36-11x)}$	$= (-211)$	|| vereinfachen	
$(-8x) + 324 - 99x$	$= (-211)$	|| vereinfachen	
$324 - 107x$	$= (-211)$	|| -324	
$-107x$	$= (-535)$	|| : (-107)	
x	$= 5$		➔ **x ist also 5.**

Dieses Ergebnis setzen wir jetzt wieder in einer der ursprünglichen Gleichungen oder im Ausdruck für y ein, um y zu berechnen.

Das ausgerechnete x anstelle der Variablen einsetzen

Also:	$11 \bullet \mathbf{5} + y$	$= 36$	oder (einfacher)	$y = 36 - 11 \bullet \mathbf{5}$
	$55 + y$	$= 36$		$y = 36 - 55$
	y	$= 36 - 55$		$y = -19$
	y	$= -19$	➔ **y ist also (-19)**	

Lösung: **x = 5 und y = (-19)** ➔ **Schnittpunkt P_S (5 / -19)**

Beispiel 2 für das Einsetzungsverfahren:

$$\begin{vmatrix} 5x + 6y & = 9 \\ 4x + 3y & = 0 \end{vmatrix}$$

Es bietet sich in diesem Fall keine „einfache" Lösung an. **Wir müssen mit einem Trick eine bessere Ausgangslage schaffen**. So können wir eine einzelne **Gleichung** bedenkenlos **beidseitig multiplizieren**, um die **Koeffizienten** (das sind die Faktoren vor x, rsp. vor y) zu **verändern**.

Das Ziel hier wird sein, gleiche Koeffizienten vor x zu schaffen (dazu können wir z.B. das kgV von 4 und 5 verwenden)

$5x + 6y = 9$	$\bullet\, 4 \rightarrow$	$20x + 24y = 36$	In der oberen Gleichung sehen wir die „Verkleidung"
$4x + 3y = 0$	$\bullet\, 5 \rightarrow$	$20x + 15y = 0$	von 20x, nämlich 20x = 36 – 24y.

➔ Der Term **36 – 24y entspricht also 20x** und kann folglich in der unteren Gleichung anstelle von 20x eingesetzt werden.

20x aus Gleichung 1 (nach der Umformung zu 20x = 36 – 24y)

(**36 - 24y**) + 15y	= 0	|| vereinfachen
36 – 9y	= 0	|| +9y
36	= 9y	|| : 9
4	= y	➔ **y ist also 4.**

Dieses Ergebnis setzen wir jetzt wieder in einer der ursprünglichen Gleichungen oder im Ausdruck für 20x ein, um y zu berechnen.

Das ausgerechnete y anstelle der Variablen einsetzen

Also:	20x	= 36 – 24 • **4**	|| vereinfachen
	20x	= 36 – 96	|| vereinfachen
	20x	= - 60	||: 20
	x	= (- 3)	➔ **x ist also (-3)**

Lösung: **x = (-3) und y = 4** ➔ **Schnittpunkt P_S (-3 / 4)**

Fragen / Bemerkungen zu den beiden oben beschriebenen Verfahren:

4.4 Das Additionsverfahren

Das eigentlich „einfachste" Verfahren für das Auflösen von Gleichungssystemen ist das Additionsverfahren. Es basiert auf der Idee, dass **durch geeignete Addition oder Subtraktion der beiden Gleichungen eine der beiden Variablen wegfällt und sich die andere somit berechnen lässt**.

Das Additionsverfahren gliedert sich in drei Teilschritte:

$$\begin{vmatrix} 2x + 9y & = 57 \\ (-4)x + 5y & = 1 \end{vmatrix}$$

1. Schritt: *Eine Variable „wählen", die man „weghaben möchte" und die Gleichungen entsprechend multiplizieren (→* ***Gleiche Koeffizienten vor der gewählten Variablen schaffen****)*

Hier wählen wir z.B. den Koeffizienten vor y auswählen.
Wir müssen die obere Gleichung • 5, die untere • 9 rechnen, damit der Koeffizient angeglichen wird.

$$\begin{vmatrix} 10x + 45y & = 285 \\ (-36)x + 45y & = 9 \end{vmatrix}$$

2. Schritt: *Jetzt subtrahieren oder addieren. Dies hängt von den Vorzeichen der ausgesuchten Koeffizienten ab*:

$10x - (-36x) = 46x$

$+45y - (+45y) = 0$

$285 - 9 = 276$

gleiche Vorzeichen: man muss subtrahieren
verschiedene Vorzeichen: man muss addieren.

hier ist der Koeffizient von y gleich (jeweils 45) und dieser hat jeweils ein + davor, also <u>gleiche Vorzeichen</u>. Man muss somit die beiden Gleichungen subtrahieren, z.B. die untere von der oberen subtrahieren*. Dabei ist auf die genauen Vorzeichen zu achten.*

$46x = 276 \quad || : 46$
$x = 6$

3. Schritt: *Ausrechnen der einen Variablen und dann der anderen.*

Die berechnete Variable (hier x) jetzt in eine der Anfangsgleichungen einsetzen und die zweite Variable (hier y) ausrechnen.

z.B. in obere Anfangsgleichung

$2 \bullet \mathbf{6} + 9y$	$= 57$	|| vereinf.
$12 + 9y$	$= 57$	|| -12
$9y$	$= 45$	|| : 9
y	$= 5$	

Lösung: **x = 6 und y = 5** **→ Schnittpunkt P_S (6 / 5)**

<u>Weitere Beispiele zur Verdeutlichung:</u>

<u>Beispiel 1:</u>

$$\begin{vmatrix} 6x - 31y & = 49 \\ (-8x) + 47y & = (-71) \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \bullet 4 \\ \rightarrow \bullet 3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 24x - 124y & = 196 \\ -24x + 141y & = (-213) \end{vmatrix} \downarrow +$$

verschiedene Vorzeichen → **ADDIEREN**
(*-124y) + 141y = +17y und 196 + (-213) = (-17)*

$17y = (-17) \quad || : 17$
$y = (-1)$

<u>→ Einsetzen in Gleichung (z.B. in Gleichung 1)</u>

$6x - 31 \bullet (-1)$	$= 49$	|| vereinf.
$6x + 31$	$= 49$	|| -31
$6x$	$= 18$	|| :6
x	$= 3$	

Lösung: **x = 3 und y = (-1)** **→ Schnittpunkt P_S (3 / -1)**

Beispiel 2

$2.5x + y$	$= 0$		In dieser Form ist das Additionsverfahren noch nicht möglich, da y auf verschiedenen Seiten steht. **Zuerst also beide Gleichungen „in gleiche Reihenfolge / Anordnung setzen“**
$7.5x$	$= y + 3$	$\|\| - y$	

$2.5x + y = 0$	$\rightarrow \bullet 6$	$15x + 6y = 0$	$\downarrow -$	gleiche Vorzeichen, also **SUBTRAHIEREN**
$7.5x - y = 3$	$\rightarrow \bullet 2$	$15x - 2y = 6$		*(+6y) – (-2y) = +8y und 0 – (+6) = (- 6)*

$8y = (-6) \quad || :8$

$y = (-\frac{6}{8}) = (-0.75)$ → Einsetzen in Gleichung (z.B. Gleichung 1)

$2.5x + \mathbf{(-0.75)} = 0 \quad || \bullet 100$ (HN)

$250x + 75 = 0 \quad || -75$

$250x = -75 \quad || :250$

$x = -0.3$

Lösung: **x = (- 0.3) und y = (-0.75)** → **Schnittpunkt P_S (-0.3 / -0.75)**

Fragen / Bemerkungen zum oben beschriebenen Verfahren:

Aufgaben „Schneiden von Geraden, Gleichungssysteme"

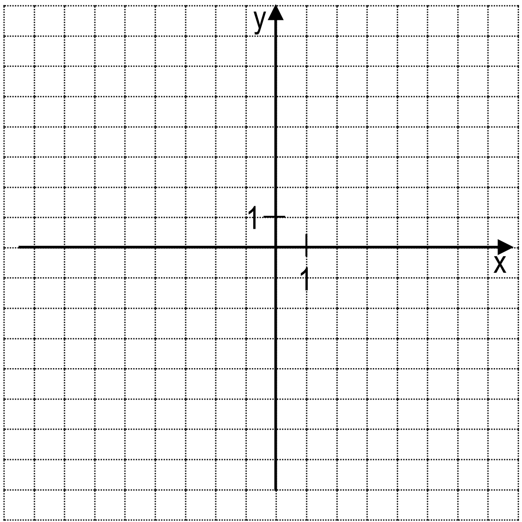
1. Gegeben ist die Funktion x → y = $\frac{3}{5}$ x + (-3)

a) Zeichne den Graph der Funktion im Koordinatensystem ein.

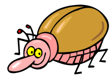
b) Bestimme den Schnittpunkt der gegebenen Gerade mit der 45°-Gerade durch den Nullpunkt (y = x) rechnerisch

c) Bestimme den Schnittpunkt mit der x-Achse rechnerisch!

d) Bestimme den Schnittpunkt der gegebenen Gerade mit der Gerade y = 5x +1.4



2. Löse die folgenden Gleichungssysteme auf.



a) $\begin{vmatrix} 5x + 2y = 57 \\ 8x - 2y = 60 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4x + 3y = 4 \\ 5x - 2y = 51 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 4x + y = 30 \\ 3y = x - 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} (-4x) + 6y = 4 \\ y - 3x = 2 \end{vmatrix}$

3. Löse die folgenden Gleichungssysteme auf.

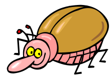
a) $\frac{4x}{5} + \frac{y}{3} = -2$; $\frac{5y}{3} - \frac{3x}{10} = 33$

b) $4x - \frac{5y}{6} = (-\frac{2}{3})$; $\frac{2x}{5} + 3y = 32$

c) $3x - 2 = 5y$; $2y = 4x - 1$

d) $2.4x = 3y - 2$; $1.5y = 3x - 1$

4. Löse die folgenden Satzaufgaben mit Hilfe von Gleichungen (die du aufschreiben musst!)



a) Zwei Zahlen unterscheiden sich um (-4) und ergeben zusammen die Summe von (-12). Bestimme die beiden Zahlen

b) Die erste Zahl ist 2.5mal so gross wie die Zweite. Zusammen ergeben sie 63. Bestimme die beiden Zahlen.

c) Die doppelte Summe von zwei Zahlen ist genauso gross wie die neunfache Differenz der beiden, nämlich 36. Bestimme die beiden Zahlen.

d) Wird zum Sechsfachen einer Zahl das Dreifache einer zweiten Zahl addiert, so erhält man 54. Subtrahiert man dagegen vom Dreifachen der zweiten Zahl die Zahl 5, so erhält man gerade die erste Zahl. Bestimme die beiden Zahlen.