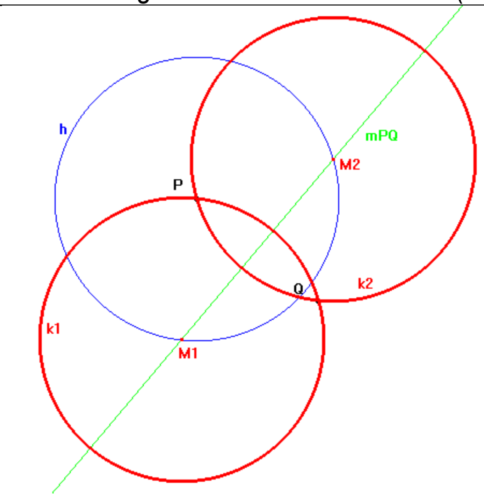
Seiten 12 - 19

Aufgaben Kreiskonstruktionen (Achtung, Lösungen z.T. verkleinert gezeichnet)

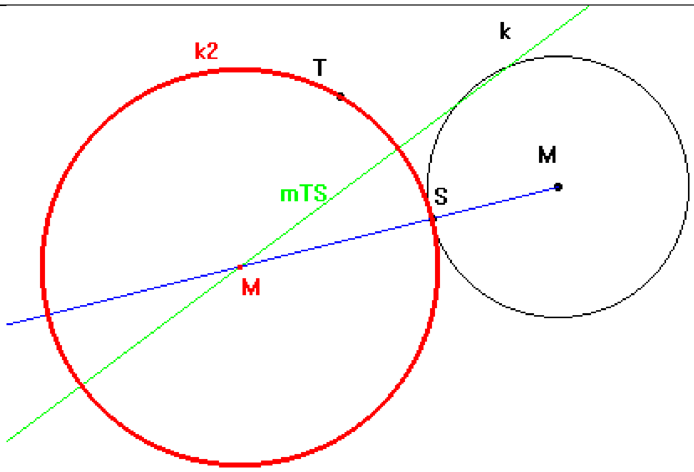
1.



Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. Mittelsenkrechte von PQ
   (Der Kreismittelpunkt muss auf der Mittelsenkrechten von zwei Kreispunkten liegen)
2. Hilfskreis h (P, r = 3.5cm) ∩ m_{PQ} ➔ M_1, M_2
   (Der Hilfskreis hat den Radius des gesuchten Kreises, da der Mittelpunkt des gesuchten Kreises 3.5 cm von P (oder Q) entfernt liegt.)
3. Lösungen einzeichnen (2 Lösungen)

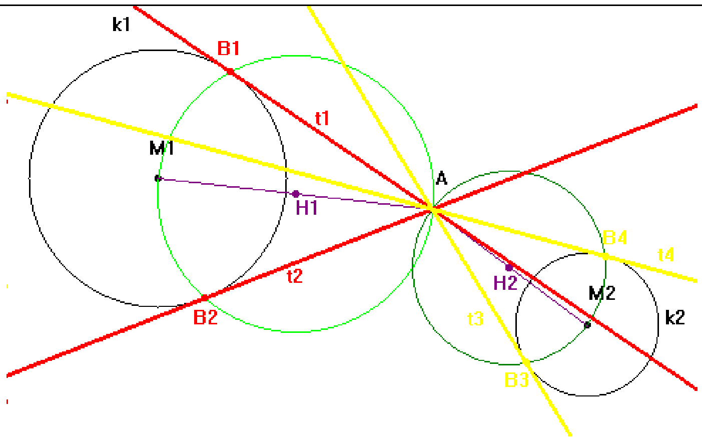
2.



Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. Mittelsenkrechte von TS
   (Der Kreismittelpunkt muss auf der Mittelsenkrechten von zwei Kreispunkten liegen)
2. MS verlängern mit m_{TS} schneiden ➔ M
   (Da der gesuchte Kreis den gegebenen Kreis in S berühren muss, steht die gemeinsame Tangente auf MS senkrecht. Also muss der gesuchte Kreisradius auf der Verlängerung von MS liegen)
3. Lösung einzeichnen: k_2 (M, r = MT)

3.

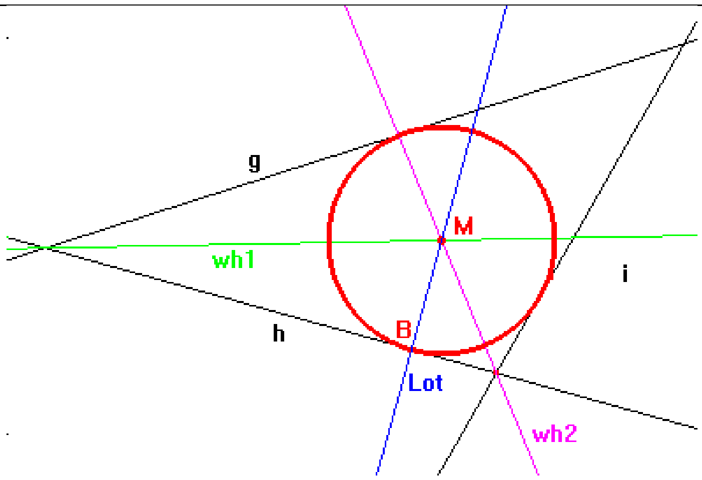


Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. Thaleskreis über M_1A
2. Thaleskreis ∩ k1 ➔ B_1, B_2
3. Tangenten t_1 und t_2 einzeichnen
4. Thaleskreis über M_2A
5. Thaleskreis ∩ k2 ➔ B_3, B_4
6. Tangenten t_3 und t_4 einzeichnen

Diese Aufgabe entspricht genau der Grundkonstruktion 2 (Genaueres kannst du dort nachlesen).

4.

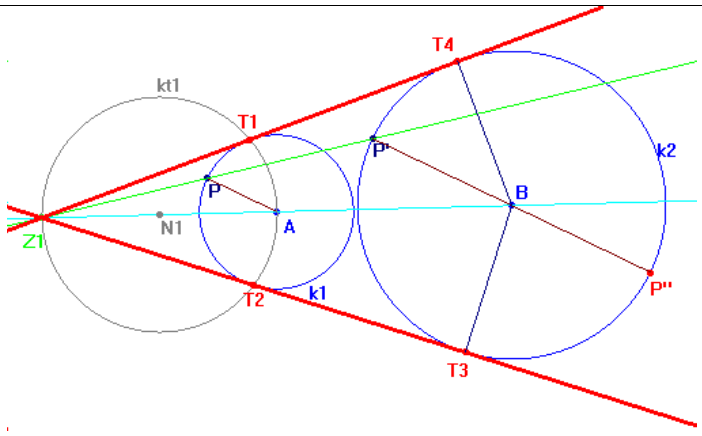


Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. Winkelhalbierende von g, h (wh_1)
2. Winkelhalbierende von h, i (wh_2)
3. $wh_1 \cap wh_2$ ➔ M
4. Lot auf h durch M (➔ Radius = LM)
5. Lösung einzeichnen

Hier wird eine Erweiterung der Grundkonstruktion 3 verwendet. Die Wahl der Winkelhalbierenden ist hier zufällig, es müssen einfach 2 Winkelhalbierende gezeichnet werden. Ebenfalls kann das Lot zur Bestimmung des Kreisradius auf jede der drei Geraden gefällt werden.

5.

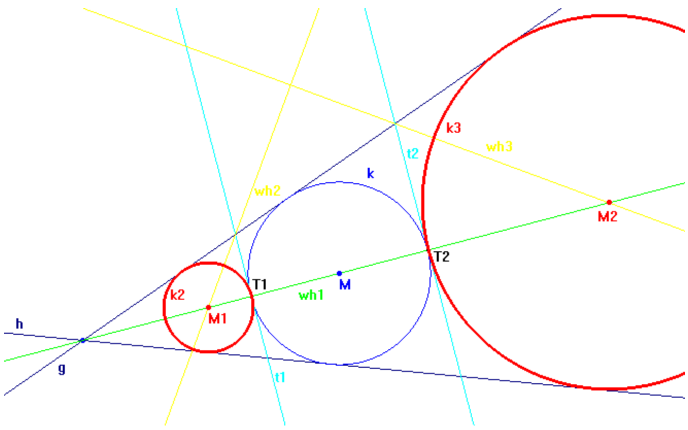


Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. k_1 (A, r = 1.5cm) und k_2 (B, r = 3cm)
2. P auf k_1 wählen, PA verbinden.
3. PA // durch B verschieben ➔ P‘, P“
4. PP‘$\cap$ AB ➔ Z_1
5. Thaleskreis über $AZ_1 \cap k_1$ ➔ T_1, T_2
6. Z_1T_1 verlängern, Z_1T_2 verlängern
7. Berührungspunkte mit k_2 einzeichnen (Lot auf t durch B)
8. Lösung einzeichnen

Diese Aufgabe entspricht der „weiteren Konstruktion 1“ aus dem Dossier.
Ab dem Schritt 4 würde auch eine zweite Lösung entstehen (PP“$\cap$ AB ➔ Z2). Bei dieser Disposition ist diese Lösung allerdings sehr schwierig zu finden, darum verzichte ich auf die Konstruktion davon.

6.

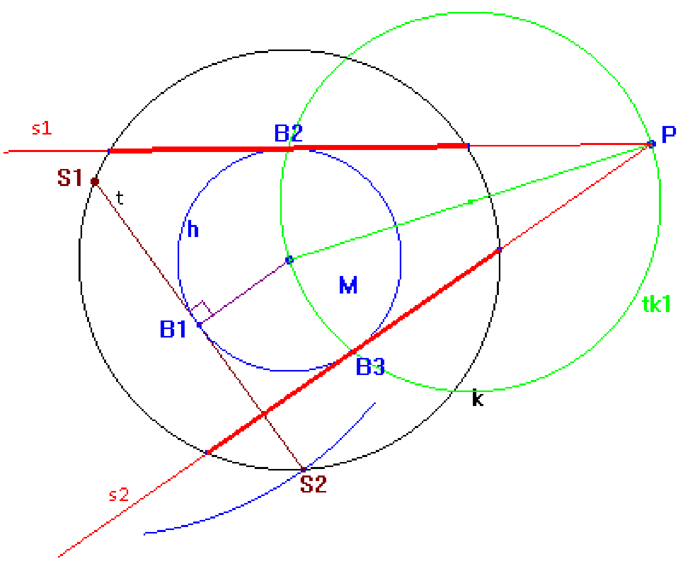


Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. Winkelhalbierende von g, h → wh_1
2. wh1 $\cap$ k → T_1, T_2
3. Lot auf wh_1 durch T_1 → t_1
4. Lot auf wh_1 durch T_2 → t_2
5. Winkelhalbierende t_1, g → wh_2
6. Winkelhalbierende t_2, g → wh_3
7. $wh_1 \cap wh_2$ ➔ M_1
8. $wh_1 \cap wh_3$ ➔ M_2
9. Lösung einzeichnen

Diese Aufgabe entspricht der „Grundkonstruktion 4“ aus dem Dossier.

7.

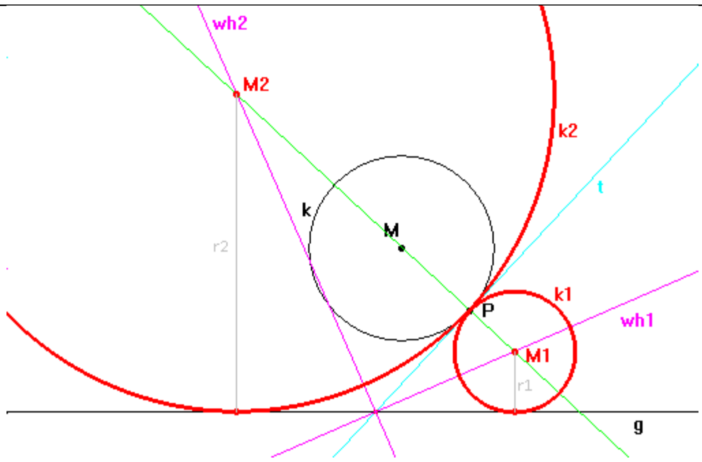


Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. Auf dem Kreis k wählen wir einen Punkt S1
2. Hilfssehne t von S1 aus einzeichnen (S1S2 = 5cm)
3. Lot auf t durch M → B1
4. Hilfskreis h (M, r = MB)
5. Thaleskreis über MP $\cap$ Hilfskreis h → B2, B3
6. Gesuchte Sehnen einzeichnen (Lösungen) (PB2 und PB3)

Hier verwenden wir die Eigenschaft, dass alle Sehnen innerhalb eines Kreises Tangenten an einen kleineren Kreis (hier h) sind und „nur“ gedreht wurden. Also reduzieren wir die Aufgabe nach dem Finden des Hilfskreises h auf die „Grundkonstruktion 2“

8.

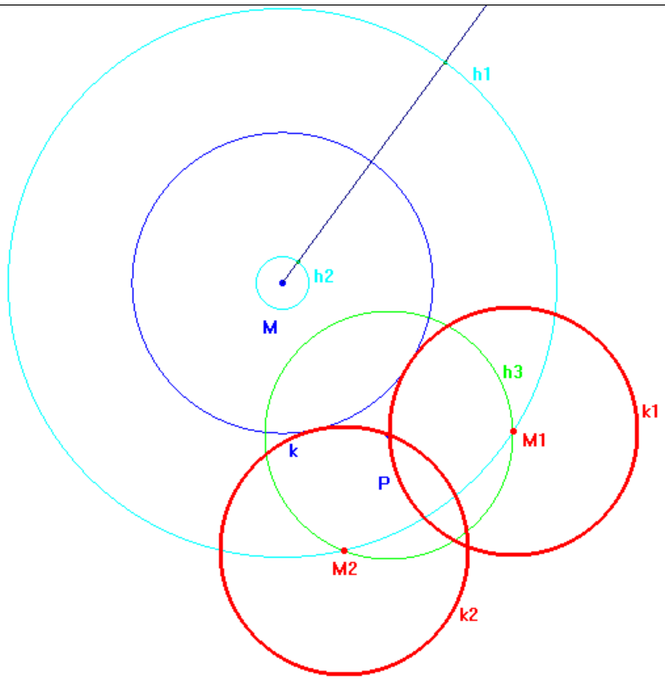


Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. MP verbinden und verlängern *(Der Radius des neuen Kreises muss auf dieser Gerade liegen, da sich die Kreise ja berühren)*
2. Lot auf MP durch P → t *(Diese Gerade ist die gemeinsame Tangenten des gegebenen Kreises und des gesuchten Kreises)*
3. Winkelhalbierende t, g → wh_1, wh_2
4. $wh_1 \cap MP$ → M_1
5. $wh_2 \cap MP$ → M_2
6. Radius 1 und Radius 2 einzeichnen (Lot auf g durch M1, rsp. durch M2)
7. Lösung einzeichnen

Diese Aufgabe lehnt an der „Grundkonstruktion 3“ aus dem Dossier an. Sobald man merkt, dass die Kreise in der Geraden t eine gemeinsame Tangente haben, ist man bei der Grundkonstruktion 3.

9.

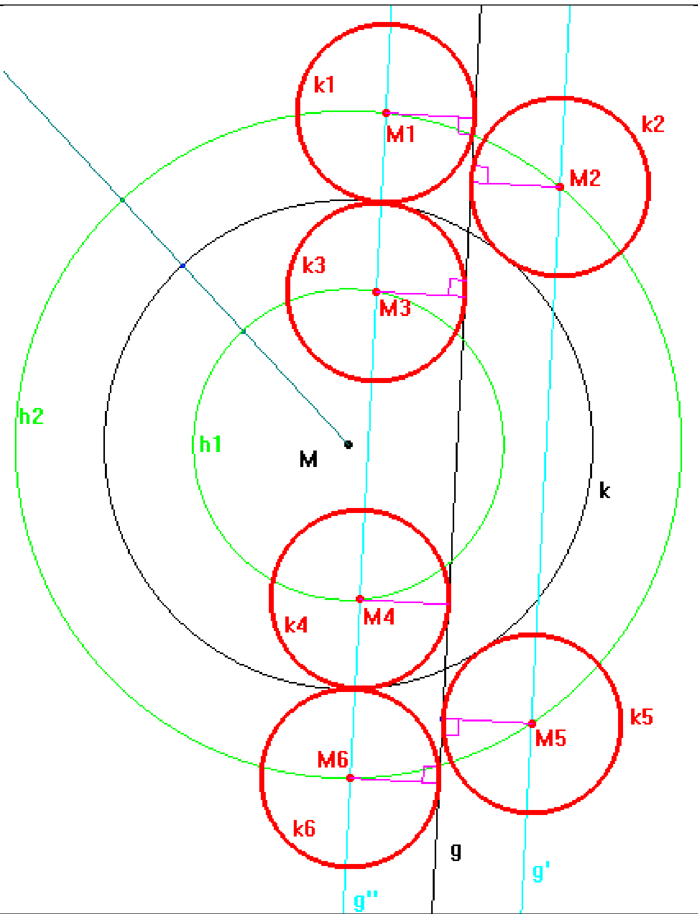


Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. Kreisradius verlängern, rsp. verkürzen um den Radius des gesuchten Kreises (2.5cm)
   Hilfskreis h1 (M, r = r + 2.5cm) und Hilfskreis h2 (M, r = r – 2.5cm)
2. Hilfskreis h3 (P, r = 2.5cm)
3. Schnittpunkte der Hilfskreise bestimmen (h1 $\cap$ h3 → M1, M2)
   (h2 $\cap$ h3 → M3, M4) → Hier keine Schnittpunkte
4. Lösung einzeichnen

Diese Aufgabe entspricht der „weiteren Konstruktion 2“ aus dem Dossier.

10.

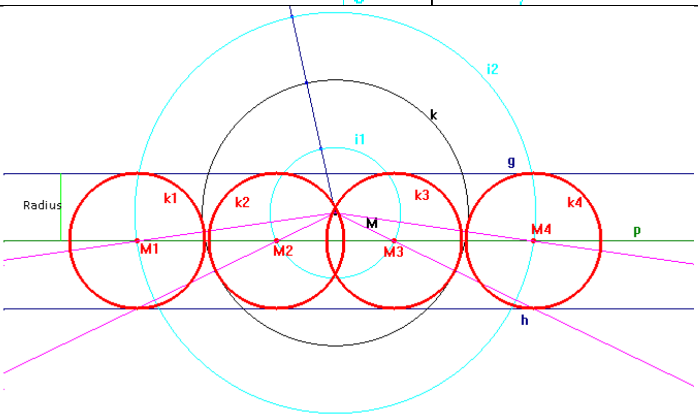


Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. Kreisradius verlängern, rsp. verkürzen um den Radius des gesuchten Kreises (1.3 cm)
   Hilfskreis h_1 (M, r = r + 1.3cm) und Hilfskreis h_2 (M, r = r – 1.3cm)
2. Parallelenpaar g‘, g“ mit Abstand 1.3cm von g *(Der Kreismittelpunkt der gesuchten Kreise muss in Abstand von 1.3cm von g liegen, da g Tangente an den Kreis sein muss)*
3. $h_1 \cap$ g“ ➔ M_1, M_3, M_4, M_6
4. $h_2 \cap$ g‘ ➔ M_2, M_5
5. Radien der Kreise einzeichnen (Lot auf g durch M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6)
6. Lösung einzeichnen (6 Lösungen)

Diese Konstruktion nimmt Bezug auf die Punkmengen (Abstand von einer Gerade = Parallelenpaar) und an der „weiteren Konstruktion 2“ aus dem Dossier.

11.

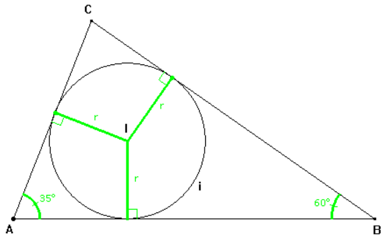


Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

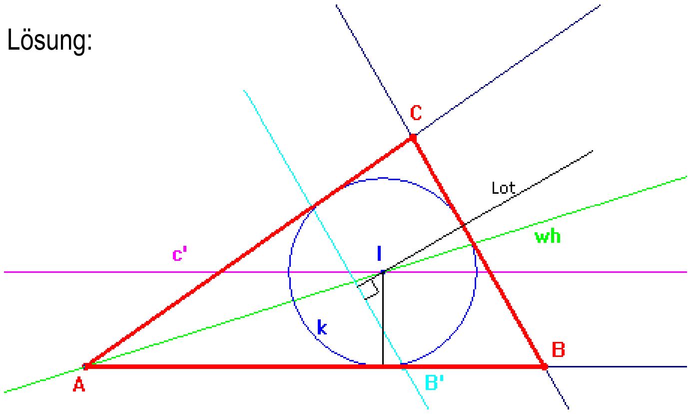
1. Mittelparallele von g und h ➔ p
   (Auf dieser Geraden muss der gesuchte Kreismittelpunkt liegen, da g und h Tangenten an den Kreis sein müssen)
2. Abstand von p zu g (oder zu h) = Gesuchter Radius des Kreises
3. *Kreisradius um den Radius des gesuchten Kreises vergrössern, rsp. verringern.*
   Hilfskreis i_1 (M, r = r + Radius) und Hilfskreis i_2 (M, r = r – Radius)
4. $i_1 \cap$ p ➔ M_2, M_3
5. $i_2 \cap$ p ➔ M_1, M_4
6. Radien der Kreise einzeichnen, Berührungspunkte mit dem Kreis k einzeichnen: Gefundene Mittelpunkte M_1-M_4 je mit M verbinden)
7. Lösung einzeichnen (4 Lösungen)

Diese Konstruktion enspricht der „weiteren Konstruktion 3“ aus dem Dossier.

12 a Skizze:



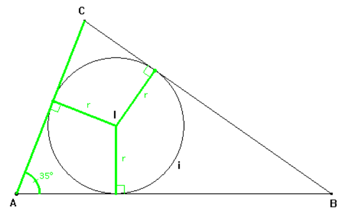
Lösung:



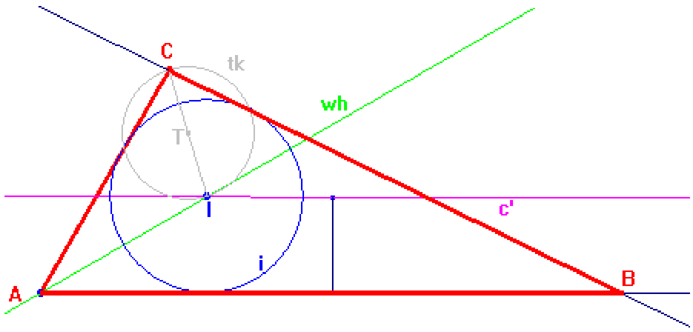
Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. A festlegen, $\alpha = 35^\circ$ einzeichnen
2. B‘ festlegen
   Hilfswinkel $\beta = 60^\circ$ einzeichnen → a‘
3. Parallele zu c (AB) mit Abstand 1.5cm einzeichnen → c‘
   (Die Seite c ist Tangente an den Inkreis, also ist der Inkreismittelpunkt auf der Parallele c‘)
4. Winkelhalbierende von α einzeichnen *(AC und AB sind Tangenten an den Inkreis, also ist der Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden)*
5. wh ∩ c‘ ➔ Inkreismittelpunkt I
6. Inkreis k einzeichnen
7. Lot auf a‘ durch I (Damit finden wir den Berührungspunkt der Seite a an den Inkreis)
8. Lösung einzeichnen

b Skizze:



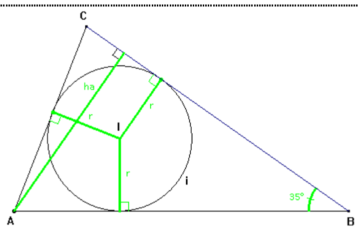
Lösung:



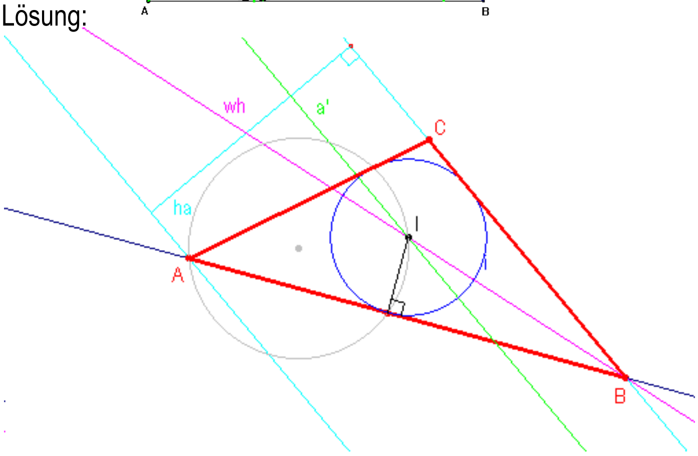
Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. A festlegen, $\alpha = 60^\circ$ einzeichnen
2. AC = b = 4cm ➔ C
3. Parallele zu c (AB) mit Abstand 1.5cm einzeichnen → c‘
   (Die Seite c ist Tangente an den Inkreis, also ist der Inkreismittelpunkt auf der Parallele c‘)
4. Winkelhalbierende von α einzeichnen *(AC und AB sind Tangenten an den Inkreis, also ist der Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden)*
5. wh ∩ c‘ ➔ Inkreismittelpunkt I
6. Inkreis i einzeichnen
7. Thaleskreis über IC (Siehe Grundkonstruktion 2). → Berührungspunkt für die Seite CB mit dem Inkreis.
8. Lösung einzeichnen

c Skizze:



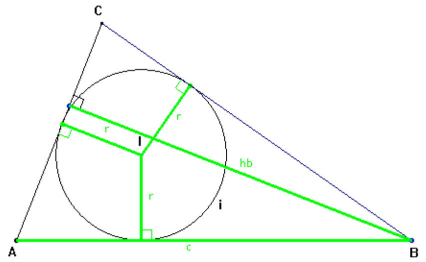
Lösung:



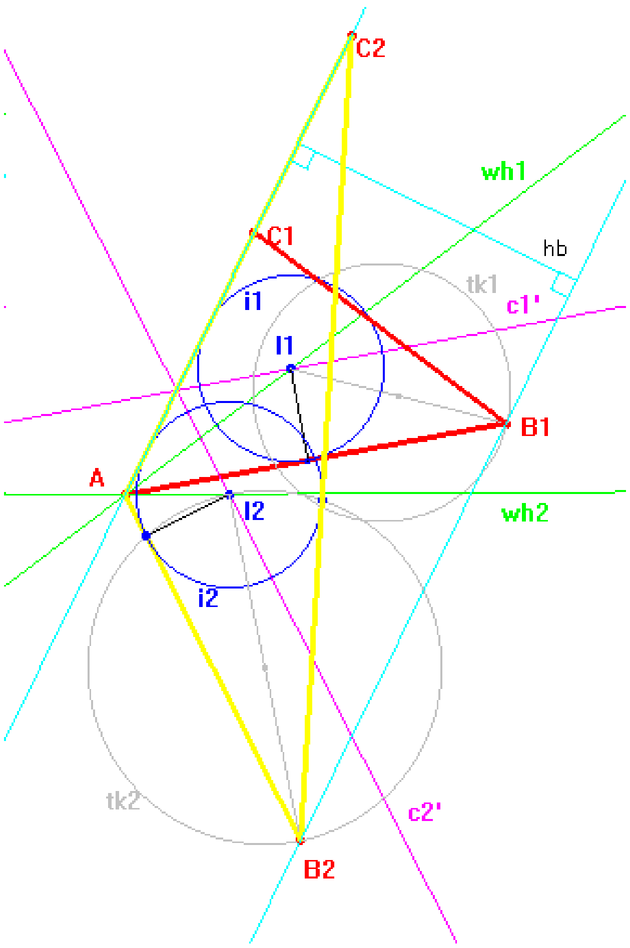
Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. Höhenstreifen ha
2. Punkt B festlegen, $\beta = 35^\circ$ einzeichnen
   ➔ Schnittpunkt mit Höhenstreifen ➔ A
3. Parallele zu a (BC) mit Abstand 1.5cm einzeichnen → a‘
   (Die Seite a ist Tangente an den Inkreis, also ist der Inkreismittelpunkt auf der Parallele a‘)
4. Winkelhalbierende von β einzeichnen *(AB und BC sind Tangenten an den Inkreis, also ist der Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden)*
5. wh ∩ a‘ ➔ Inkreismittelpunkt I
6. Inkreisradius einzeichnen (Lot auf AB durch I)
7. Inkreis i einzeichnen
8. Thaleskreis über AI (Siehe Grundkonstruktion 2). → Berührungspunkt für die Seite AC mit dem Inkreis.
9. Lösung einzeichnen

d Skizze:



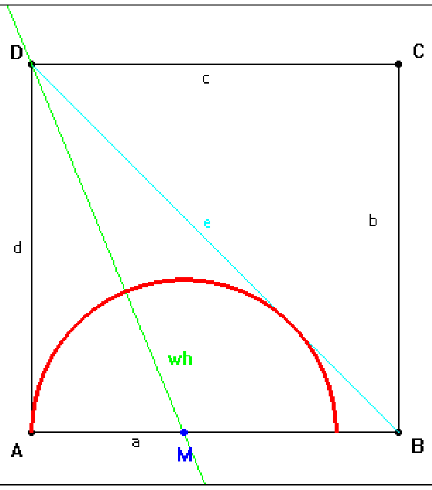
Lösung:



Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. Höhenstreifen hb (4cm)
2. Punkt A festlegen, AB mit Zirkel abtragen k (A, r = 5cm) ➔ B1, B2
3. Parallele zu c (AB) mit Abstand 1.2cm einzeichnen → c_1‘, c_2‘
   (Die Seite c ist Tangente an den Inkreis, also ist der Inkreismittelpunkt auf der Parallele c‘)
4. Winkelhalbierende von α einzeichnen *(AC und AC sind Tangenten an den Inkreis, also ist der Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden)*
5. $wh_1 \cap c_1$‘ ➔ Inkreismittelpunkt I_1
   $wh_2 \cap c_2$‘ ➔ Inkreismittelpunkt I_2
6. Inkreisradius einzeichnen
   (Lot auf c durch I)
7. Inkreis i einzeichnen
8. Thaleskreis über BI_1, rsp. BI_2 (Siehe Grundkonstruktion 2). → Berührungspunkt für die Seite BC mit dem Inkreis.
9. Lösungen einzeichnen (2 Lösungen)

13



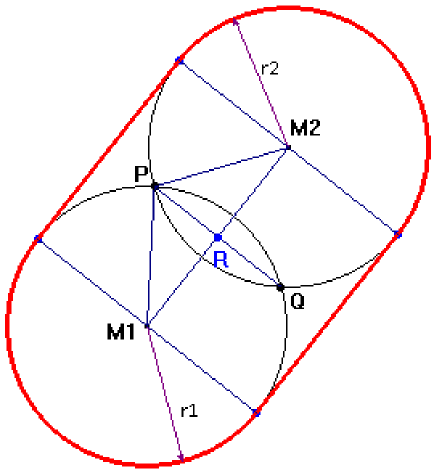
Konstruktionsbericht (Lösungsplan)

1. Quadrat konstruieren (s = 5cm)
2. Diagonale e einzeichnen (DB)
3. Winkelhalbierende d, e einzeichnen
   (Die Seite d und die Diagonale e sind Tangenten an den gesuchten Halbkreis, also ist der Kreismittelpunkt auf der Winkelhalbierenden)
4. wh ∩ a ➔ M
5. Lösung einzeichnen

Seite 20

Aufgaben Kreisberechnungen

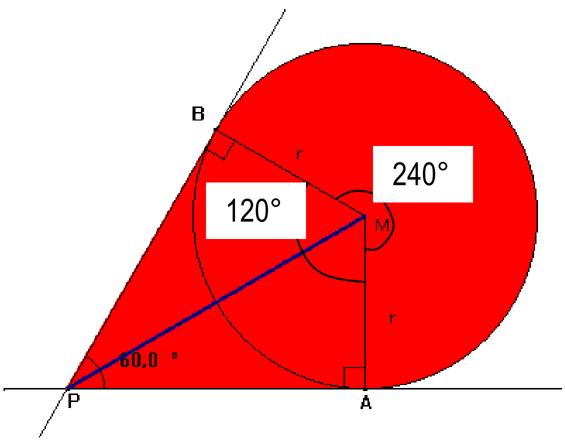
14



Berechnung

1. $M_1R = 12a$ (24a : 2 = 12a)
2. $PR = 5a$ (10a : 2 = 5a)
3. M_1P mit Pythagoras:
   $M_1P = \mathbf{r} = \sqrt{(12a)^2 + (5a)^2} = \sqrt{144a^2 + 25a^2}$
   $= \sqrt{169a^2} = 13a$
4. Der gesuchte Umfang besteht aus zwei Halbkreisen mit Radius r, sowie zwei Strecken mit der gleichen Länge wie M_1M_2. Somit können wir den Umfang berechnen:
   $2 \bullet$ Halbkreis + $2 \bullet$ Strecke M_1M_2
   $= 2 \bullet \frac{2\pi r}{2} + 2 \bullet 24a$
   $= 2 \bullet \pi \bullet r + 48a$
   $= 2 \bullet \pi \bullet 13a + 48a$
   $= \pi \bullet 26a + 48a$
   $= \underline{\mathbf{2a\,(13\,\pi + 24)}} \approx \underline{129.68a}$

15



Wenn wir PM verbinden, so entsteht mit dem Dreieck PMB ein halbes gleichseitiges Dreieck. Damit muss die Strecke PM = 2r sein (da BM die halbe Seite darstellt und BP die Höhe des gleichseitigen Dreiecks.)
Mit Pythagoras folgt die Länge von PB

$BP = \sqrt{(2r)^2 + r^2} = \sqrt{4r^2 + r^2}$
$= \sqrt{5r^2} = \mathbf{r\sqrt{5}} \approx \underline{2.236r}$

AMBP ist ein Viereck (Winkelsumme 360°). Somit ist der Winkel bei M = 120° (360° – 60° – 90° – 90° = 120°)

a) Umfang:

Der Umfang besteht aus dem Streckenanteil BP und PA (beide gleich lang) und dem Kreisbogen. Dieser hat einen Zentriwinkel von 240°

$u = 2 \bullet r\sqrt{5} + \frac{2\pi r \bullet 240}{360}$

$= 2r\sqrt{5} + \frac{2\pi r \bullet 2}{3}$

$= \mathbf{2r\,(\sqrt{5} + \frac{2\pi}{3})} \approx \underline{8.661r}$

b) Fläche:

Die Fläche besteht aus zwei rechtwinkligen Dreiecken und einem Kreissektor mit Zentriwinkel 240°

$A = 2 \bullet \frac{r \bullet \sqrt{5}\, r}{2} + \frac{r^2\pi \bullet 240}{360}$

$= r^2\sqrt{5} + \frac{r^2\pi \bullet 2}{3}$

$= \mathbf{r^2\,(\sqrt{5} + \frac{2\pi}{3})} \approx \underline{4.33r^2}$