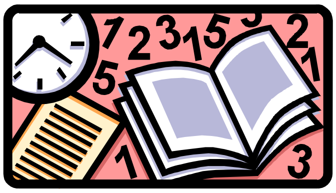
Name:



Mathematik-Dossier

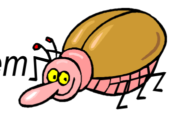
Algebra in der Menge $\mathbb{Q}$

Inhalt:

- **Das Produkt von Binomen**
- **Die Biomischen Formeln**
- **Erweitern, Kürzen, Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren von Bruchtermen**
- **Gleichungen in Q – mit der Lösungsvariablen im Zähler und/oder Nenner**
- **Wurzelgleichungen**

Verwendung:

Dieses Dossier dient der Repetition und Festigung innerhalb der obgenannten Themen. Es beinhaltet einen kurzen Theorie-Teil, sowie verschiedene Übungen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden.

Wichtig: Die Aufgaben erfordern ein konzentriertes Vorgehen. Es ist daher sinnvoll, mindestens während 15 Minuten am Stück daran zu arbeiten, mit Vorteil bearbeitest du ein ganzes Kapitel aufs Mal.

1. Rechnen mit Binomen

Sicher erkennst du im Wort Binomen den Ausdruck „Bi“, was soviel wie „zwei“ bedeutet. Ein Binom ist also ein Term, der aus zwei Gliedern besteht. Daneben kommen in diesem Kapitel auch dreigliedrige Terme vor (sie heissen dann: Trinome, weil Tri = Drei). Natürlich weisst du noch ganz gut, wie das Distributivgesetz funktioniert und bist damit gerüstet, wieder in die Algebra einzusteigen. Denn mit dem Ausmultiplizieren (also Distributivgesetz) ist das Multiplizieren zweier Binome verwandt.

Vorbemerkung und Abmachung: Ab sofort schreiben wir **negative Zahlen ohne die Klammern** (dies als Vereinfachung).

Also gilt: $(-a) = -a$ **und** $a + (-b) = a + -b = a - b$

1. Das Produkt von zwei Binomen

Wenn du dich ans Distributivgesetz zurückerinnerst, weisst du noch, dass z.B.

$$8 \bullet (5+4) = 8 \bullet 5 + 8 \bullet 4 = 40 + 32 = 72$$

Anstelle der Zahl 8 könnten wir durchaus auch 5+3 schreiben, und das Ergebnis müsste noch immer 72 sein. Und schon haben wir ein Produkt von zwei Binomen (zwei zweigliedrigen Termen): Ersetzen wir die 8 immer durch (5+3) so ergibt sich folgende Rechnung:

$$(5+3) \bullet (5+4) = (5+3) \bullet 5 + (5+3) \bullet 4 = 5 \bullet 5 + 3 \bullet 5 + 5 \bullet 4 + 3 \bullet 4 = 25 + 15 + 20 + 12 = 72$$

Von vorne her gelesen gibt also $(5+3) \bullet (5+4) = 5 \bullet 5 + 5 \bullet 4 + 3 \bullet 5 + 3 \bullet 4$ (Jede Zahl von vorne mal jede von hinten)

Schreiben wir anstelle von Zahltermen allgemeine Algebra-Terme, so stellt sich uns die Aufgabe, die beiden Binome (a + b) und (c + d) miteinander zu multiplizieren. Dies funktioniert entsprechend gleich:

$$(a + b) \bullet (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Regel: Jedes Glied des ersten Binoms mit jedem Glied des zweiten Binomes multiplizieren. Die Vorzeichen sind dabei mitzunehmen.

Da verschiedene Vorzeichen vorkommen ergeben sich vier mögliche Kombinationen:

$(a + b) \bullet (c + d) = ac + ad + bc + bd$

$(a + b) \bullet (c - d) = ac - ad + bc - bd$ *(weil bei –d das Vorzeichen mitgenommen wird, also a •–d und b •–d)*

$(a - b) \bullet (c - d) = ac - ad - bc + bd$ *(Vorzeichen mitnehmen, also a •–d = -ad; -b •c= - bc und -b •–d = +bd)*

$(a - b) \bullet (c + d) = ac + ad - bc - bd$ *(Vorzeichen mitnehmen, also -b •c= - bc und -b • d = -bd)*

<u>Allgemein:</u> $$\mathbf{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

2. Quadratische Trinome in ein Produkt von Binomen verwandeln

Interessant ist es, wenn man Trinome in ein Produkt von Binomen verwandelt (und umgekehrt). Kommt dabei eine Variable (z.B. x) in beiden Binomen vor, gibt es einen ganz einfachen Tipp:

→ durch Ausklammern von x in den mittleren zwei Gliedern

$(x + a)(x + b) \quad = \quad x^2 + bx + ax + ab = \quad x^2 + x(a+b) + ab$

Summe (a+b) **Produkt** a • b

Es ist also zu erkennen, dass zuerst x^2 vorkommt, dann **x mal die Summe der beiden Zahlen** und **zum Schluss das Produkt der beiden Zahlen**. Dies machen wir uns zu Nutze, wenn wir aus einem Trinom ein Binom machen möchten.

Beispiel 1:

$x^2 + 6x \boxed{+ 5} \quad = (x \quad) \bullet (x \quad)$ → Die gesuchten Zahlen müssen als **Produkt + 5,** **als Summe +6 haben.**

→ Beginnen wir mit dem Produkt, können wir die Möglichkeiten auflisten:

Das stimmt überein

Wie kann man als Produkt +5 erreichen?

+ 5	= + 5 • + 1	Überprüfen wir die entsprechende Summe:	(+ 5) + (+ 1) = + 6
	= – 5 • – 1		(- 5) + (- 1) = - 6

Also können wir schreiben $\quad x^2 + 6x + 5 = (x \mathbf{+5}) \bullet (x \mathbf{+1})$ *[oder wir vertauschen die Faktoren (x + 1) (x + 5)]*

Beispiel 2:

$a^2 - 10a \boxed{+ 24} \quad = (a \quad)(a \quad)$ → Die gesuchten Zahlen haben das $\boxed{\text{Produkt + 24}}$ und die Summe -10.

→ Beginnen wir mit dem Produkt, können wir die Möglichkeiten auflisten:

Wie kann man als Produkt +24 erreichen?

+ 24	= + 24 • + 1	Überprüfen wir die entsprechende Summe:	(+ 24) + (+ 1) = + 25
	= + 12 • + 2		(+ 12) + (+ 2) = + 14
	= + 6 • + 4		(+ 6) + (+ 4) = + 10
	= + 3 • + 8		(+ 3) + (+ 8) = + 11
	= - 24 • -1		(- 24) + (- 1) = - 25
	= - 12 • - 2		(- 12) + (- 2) = - 14
	= - 6 • - 4	Das stimmt überein →	**(- 6) + (- 4) = - 10**
	= - 3 • - 8		(- 3) + (- 8) = - 11

Also können wir schreiben: $\quad a^2 - 10a + 24 = (a \mathbf{-6}) \bullet (a \mathbf{-4})$

Beispiel 3:

$8x^2 - 56x - 144$ → Ein Problem stellt sich, da 8 keine Quadratzahl ist. Glücklicherweise können wir aber 8 aus allen drei Gliedern ausklammern. So können wir anschliessend mit dem gleichen Verfahren wie oben weiterfahren.

$8x^2 - 56x - 144 = 8(x^2 - 7x \boxed{- 18}) = 8(x \quad)(x \quad)$ → Die gesuchten Zahlen haben $\boxed{\text{Produkt – 18}}$ und Summe – 7.

→ Beginnen wir mit dem Produkt, können wir die Möglichkeiten auflisten:

-18	= - 18 • + 1	Überprüfen wir die entprechende Summe:	(-18) + (+ 1) = - 17
	= - 9 • + 2	Das stimmt überein →	**(- 9) + (+ 2) = - 7**
	= - 6 • + 3		(- 6) + (+ 3) = - 3
	= + 18 • - 1		(+ 18) + (- 1) = + 17
	= + 9 • - 2		(+ 9) + (- 2) = + 7
	= + 6 • - 3		(+ 6) + (- 3) = + 3

Also können wir schreiben: $\quad 8x^2 - 56x - 144 = 8(x^2 - 7x - 18) = 8(x \mathbf{-9})(x \mathbf{+2})$

Beispiel 4 (Schwierig!):

$9x^2 - 18x - 16$ → *Hier kann nicht ausgeklammert werden*, doch lässt sich auch dieses Trinom in ein Produkt von Binomen verwandeln. Man muss dabei aber die Entstehung von „Summe und Produkt" genau studieren.

Es wird eine Form (3x) (3x) entstehen, denn anders lassen sich die $9x^2$ nicht bilden. Um die Zahlen, nennen wir sie einmal a und b aber bestimmen zu können müssen wir das Produkt der Binomen genauer betachten.

Hier lässt sich 3x ausklammern

$(3x + a)(3x + b) = 9x^2 + 3bx + 3ax + ab = 9x^2 + \mathbf{3x}(a+b) + ab$

Summe (a+b) **Produkt** a • b

Wir sehen also, dass der hinterste Teil des Trinomes unverändert das Produkt der Zahlen a und b darstellt, während der Mittelteil das Produkt aus der Summe (a+b) und 3x beträgt. Um in unserem Beispiel die beiden Zahlen a und b zu bestimmen, **müssen wir die Zahl (-18) also durch 3 dividieren** (weil die gesuchte Summe ja mit 3 multipliziert wird).

$9x^2 - 18x - 16$ =(3x) (3x) ➔ Zahlen mit Produkt – 16 und Summe – 6 gesucht.

→ Beginnen wir mit dem Produkt, können wir die Möglichkeiten auflisten:

-16	= - 16 • + 1	Überprüfen wir die Summe:	(-16) + (+ 1) = - 15
	= - 8 • + 2	Das stimmt überein ➔	**(- 8) + (+ 2) = - -6**
	= - 4 • + 4		(- 4) + (+ 4) = 0
	= + 16 • - 1		(+16) + (- 1) = + 15
	= + 8 • - 2		(+ 8) + (- 2) = + 6

Also können wir schreiben: $9x^2 - 18x - 16 = (3x \mathbf{- 8})(3x \mathbf{+ 2})$

3. Anwendung in Gleichungen

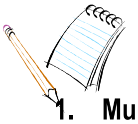
Die Anwendung dieser Rechnungen in Gleichungen ist häufig. Dabei muss man schrittweise vorgehen und sich nicht durch die vielen Klammern und so weiter verwirren lassen. Zudem kommt hier die Auflösung von quadratischen Gleichungen wieder zum Einsatz, wobei zu beachten ist, dass bei **quadratischen Gleichungen zwingend eine Seite = 0 sein muss und die andere Seite in Produktschreibweise**. Dann kann man die einzelnen Faktoren herauspicken und = 0 setzen und schon hat man die Lösungen **(➔ Fallunterscheidung)**. Quadratische Gleichungen haben immer zwei Lösungen (manchmal fallen diese aber zusammen.)

Beispiel:

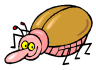
$(2x - 4)(x + 6)$	=	$(x + 7)(x + 7) - 57$	¦ Binomenprodukte ausrechnen (gem. Regel)
$2x^2 + 12x - 4x - 24$	=	$x^2 + 7x + 7x + 49 - 57$	¦ Ordnen und vereinfachen
$2x^2 + 8x - 24$	=	$x^2 + 14x - 8$	¦ **Da x^2 nicht wegfällt, alles auf eine Seite** → $-x^2$; $-14x$; $+8$
$x^2 - 6x - 16$		= 0	¦ **In Produktschreibweise verwandeln**
$(x - 8)(x + 2)$		= 0	¦ **Klammern einzeln = 0 setzen (Fallunterscheidung)**

$x - 8 = 0$ ➔ $x = 8$

$x + 2 = 0$ ➔ $x = -2$ **Lösungsmenge $\mathbb{L}$ = {-2, 8}**



Aufgaben „Produkt von zwei Binomen / Trinome in Binome verwandeln“



1. Multipliziere aus:

a) $(r + 8)(s - 11) =$

b) $(x + 3)(x - 8) =$

c) $(19y + 3)(8 - 4y) =$

d) $(x - 2)(x + 9) =$

e) $(4y - 9)(6y + 8) =$

f) $(a + 4)(a + 8) =$

g) $(-5s + 3)(s - 3) =$

h) $(c + 5)(c - 2) =$

2. Verwandle die Trinome in ein Produkt von Binomen:

a) $x^2 - 3x + 2 =$

b) $x^2 - 14x + 49 =$

c) $y^2 - y - 72 =$

d) $2x^2 + 8x + 6 =$

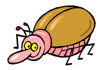
e) $b^2 + 3b - 28 =$

f) $5x^2 + 35x - 90 =$

g) $16x^2 - 32x + 15 =$

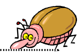
h) $m^2 - 16m + 55$

3. Bestimme die Lösungsmenge jeder Gleichung bezüglich G = Q

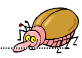


a) $(x + 5)\,(x - 7) = x\,(3 + x)$

b) $(x - 2)\,(6x - 17) = (2x - 1)\,(3x - 13)$



c) $(x + 5)\,(x + 5) - 18 = (x - 4)\,(x + 7)$



d) $(x - 5)\,(x - 5) - 3\,(x + 1) = 10$

2. Die drei Binomischen Formeln

(Das Quadrat einer Summe bzw. einer Differenz sowie die Differenz von zwei Quadraten)

Für jede Art von Gleichungen, Operation mit Bruchtermen etc. musst du die drei Binomischen Formeln auswendig in alle Richtungen kennen. Da geht nichts über üben, üben, üben. Und wer genug geübt hat, wird sich ab guten Noten und schnell erledigten Hausaufgaben erfreuen können. So einfach kann Algebra sein….

Alle drei Formeln sind eigentlich „nur" Spezialfälle der Multiplikation von zwei Binomen.

1. <u>Binomische Formel:</u> $\mathbf{(a + b)^2} = (a + b)\,(a + b) = \underbrace{a^2 + ab + ab + b^2}_{\boxed{+ab\ +\ ab\ \text{zusammenfassen}}}$ $\mathbf{= a^2 + 2ab + b^2}$

   Aussen die Quadrate, innen das doppelte Produkt von a und b.

2. <u>Binomische Formel:</u> $\mathbf{(a - b)^2} = (a - b\ \ (a - b) = \underbrace{a^2 - ab - ab + b^2}_{\boxed{-ab\ -\ ab\ \text{zusammenfassen}}}$ $\mathbf{= a^2 - 2ab + b^2}$

   Aussen die Quadrate, innen das doppelte Produkt von a und b.

3. <u>Binomische Formel:</u> $\mathbf{(a - b)\,(a + b)} = \underbrace{a^2 - ab + ab - b^2}_{\boxed{-ab\ +\ ab\ \text{zusammenfassen}}}$ $\mathbf{= a^2 - b^2}$

   Differenz von zwei Quadraten

Übersicht über die drei Binomischen Formeln:

$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ *(1. Binomische Formel)*
$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ *(2. Binomische Formel)*
$\mathbf{(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2}$ *(3. Binomische Formel)*

Beispiele:

$a^2 - 12a + 36 = \mathbf{(a - 6)^2}$ ➔ <u>Grund:</u> Vorne und hinten Quadratzahlen (von a und von 6). In der Mitte das **Doppelte Produkt** von a und 6, nämlich 2 • a • 6 = 12a.
Wegen dem – vor dem Mittelteil handelt es sich um die *2. Binomische Formel*.

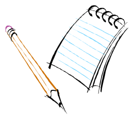
$x^2 + 14x + 49 = \mathbf{(x + 7)^2}$ ➔ <u>Grund:</u> Vorne und hinten Quadratzahlen (von x und von 7). In der Mitte das **Doppelte Produkt** von x und 7, nämlich 2 • x • 7 = 14x.
Wegen dem + vor dem Mittelteil handelt es sich um die *1. Binomische Formel*.

$25x^2 - 81 = \mathbf{(5x + 9)\,(5x - 9)}$ ➔ <u>Grund:</u> Die Differenz von zwei Quadratzahlen (von 5x und von 9). Kein Mittel-Teil. Somit ist es die *3. Binomische Formel*.

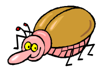
$(2x + 4)\,(2x - 4) = \mathbf{4x^2 - 16}$ ➔ <u>Grund:</u> Die beiden Klammern unterscheiden sich nur durch das Operations-zeichen. Somit handelt es sich um die *3. Binomische Formel* und man muss die Differenz der beiden Quadrate (von 2x und von 4) bilden.

$(5x + 3)^2 = \mathbf{25x^2 + 30x + 9}$ ➔ <u>Grund:</u> Es handelt sich um die 1. Binomische Formel. Somit muss man die beiden Quadrate bilden (von 5x und von 3) und als Mittelteil das doppelte Produkt (also 2 • (+5x) • (+3) = +30x) einfügen

$(7x - 13)^2 = \mathbf{49x^2 - 182x + 169}$ ➔ <u>Grund:</u> Es handelt sich um die 2. Binomische Formel. Somit muss man die beiden Quadrate bilden (von 7x und von 13) und als Mittelteil das doppelte Produkt (also 2 • (+7x) • (-13) = (-182x)) einfügen.



Aufgaben „Die Binomischen Formeln“



1. Multipliziere aus und notiere hinten die Nummer der Binomischen Formel.

a) $(13 + y)^2$ = ... Binomische Formel

b) $(4d + 2)^2$ = ... Binomische Formel

c) $(5a - 4c)^2$ = ... Binomische Formel

d) $(5d+6c)\ (5d - 6c)$ = ... Binomische Formel

e) $(14x - 13y)\ (14x - 13y)$ = ... Binomische Formel

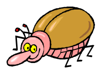
f) $(a\sqrt{8} - x\sqrt{2}\,)^2$ = ... Binomische Formel

g) $(5s + 3)^2$ = ... Binomische Formel

h) $(3a - 4c)^2 =$ = ... Binomische Formel

i) $(5d + 2)^2 =$ = ... Binomische Formel

k) $(4h + 5i)\ (5i - 4h)$ = ... Binomische Formel



2. Verwandle die Trinome in ein Produkt von Binomen und notiere die Nummer der Binomischen Formel:

a) $x^2 - 4x + 4$ = ... Binomische Formel

b) $p^2 - 2pv + v^2$ = ... Binomische Formel

c) $16r^2 - 8r + 1$ = ... Binomische Formel

d) $9u^2 + 30u + 25$ = ... Binomische Formel

e) $q^2 - 0{,}5q - 0{,}36$ = ... Binomische Formel

f) $144x^2 - 225$ = ... Binomische Formel

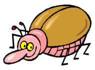
g) $196s^2 - 289$ = ... Binomische Formel

h) $64a^2b^2 - 9c^2$ = ... Binomische Formel

i) $9p^2 + 6p + 1$ = ... Binomische Formel

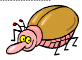
k) $49x^2 - 28x + 4$ = ... Binomische Formel

3. **Löse die folgenden Gleichungen bezüglich G = Q und bestimme die Lösungsmenge.**



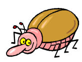
a) $(x - 5)^2 - (3 - 5x) = 16$

b) $(x - 4)\,(x + 4) = (2 - x)\,(x - 8)$

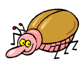


c) $y^2 - 2\,(y + 4)^2 = (y - 1)^2 - 3y\,(y + 2)$

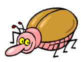
d) $18x = x^2 + 81$



e) $x^2 + 11x + 18 = 0$

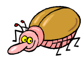


f) $(2x - 4)\,(x + 6) = (x + 7)^2 - 57$



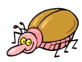
g) $2\,(y + 1)\,(y - 7) = 3\,(3 - y)^2 - (2y)^2 + 31$

h) $(x - 5)^2 - 3\,(x + 1) = 10$



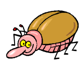
i) $(3y - 2)\,(3y + 2) + 38y = (5y + 3)\,(y + 7)$

4. Stelle eine Gleichung auf und löse sie:



a) Vergrössert man eine Zahl um 11, so ist das Quadrat der neuen Zahl um 913 grösser als das Quadrat der ursprünglichen Zahl. Berechne die ursprüngliche und die neue Zahl.

b) Die Summe zweier Zahlen beträgt 45. Verkleinert man jede der beiden um 13, so beträgt die Differenz ihrer Quadrate 133. Berechne die beiden Zahlen.



3. Kürzen von Bruchtermen

Das gute alte Kürzen kommt wieder vor. Diesmal mit Binomen, mit Trinomen und mit all den bösen Dingen, die du inzwischen gelernt hast. Doch das Kürzen (oder besser die Regeln beim Kürzen) haben sich nicht verändert. Es gilt nach wie vor:

- **Kürzen ist nur erlaubt, wenn Zähler und Nenner in Produktschreibweise stehen (➔ „Nur der Dumme kürzt die Summe").**
- **Für die Umformung können wir binomische Formeln, das Ausklammern oder das Verwandeln von Trinomen in ein Produkt von Binomen (mit Hilfe von Summe und Produkt der Zahlen) verwenden.**

Beispiele:

$$\frac{36y^2 + 36y + 9}{6y + 3} = \frac{(6y + 3)^2}{6y + 3} = \mathbf{6y + 3}$$

Da nicht direkt aus der Summe gekürzt werden darf, muss zuerst mittels der 1. Binomischen Formel im **Zähler in Produktschreibweise verwandelt** werden. Erst jetzt darf bei **gleichen Faktoren gekürzt** werden.

$$\frac{8xy - 8yz}{8x^2y - 8yz^2} = \frac{8y(x - z)}{8y(x^2-z^2)} = \frac{8y(x - z)}{8y(x-z)(x+z)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(x+z)}}$$

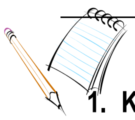
3. Binomische Formel

Da nicht direkt aus der Summe gekürzt werden darf, muss zuerst mittels **Ausklammern** gearbeitet werden. Anschliessend entdecken wir im Nenner eine **3. Binomische Formel**, können diese in ein Produkt umschreiben und anschliessend **gleiche Faktoren kürzen**.

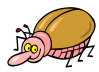
3. Binomische Formel

$$\frac{(x^2 - y^2)(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{(x+ y)(x - y)(x+y)}{(x+y)^2} = \mathbf{(x - y)}$$

Hier entdecken wir schnell die 3. Binomische Formel im Zähler, verwandeln die in ein Produkt von Binomen und können bereits gleiche Faktoren kürzen.



Aufgaben „Kürzen von Bruchtermen"



1. Kürze die Bruchterme so weit wie möglich.

a) $\frac{(14x^2y + 35xy^2)}{21xy} =$ ______________________

b) $\frac{(a^2 - 9)}{a^2 + 3a} =$ ______________________

c) $\frac{y^2 - 11y + 30}{2y^2 - 6y - 36} =$ ______________________

d) $\frac{18 - 3x}{x^2 - 12x + 36} =$ ______________________

e) $\frac{36 - y^2}{3y^2 + 36y + 108} =$ ______________________

f) $\frac{4a^2 - 20ab + 25b^2}{2ac - 5bc} =$ ______________________

4. Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Es zeigt sich auch hier, wer in der Vergangenheit gut aufgepasst hat. Denn die „alten“ Themen kommen wieder. Und darum bleibt auch hier der Theorieteil kurz, es geht nur ums „Aufwärmen“ der alten Dinge. Bei grundlegenden Fragen kannst du im entsprechenden Dossier nachschauen („Grundoperationen in Q“, 2. Sek)

Im Bereich „Addition und Subtraktion von Bruchtermen“ ist das Zauberwort

- **Gleichnamigmachen**

Nur: Wie geht das schon wieder?

a) Die **Voraussetzung für das Gleichnamigmachen** ist, dass alle **Nenner in Produktschreibweise** vorliegen.
b) Danach muss **jeder einzelne verschiedene Faktor in den Hauptnenner** aufgenommen werden (kgV der Nenner)
c) Nun muss man noch die beteiligten **Brüche entsprechend erweitern**
d) und zum Schluss noch **vereinfachen und kürzen**.

➔ *Vorsicht vor den Vorzeichen (wenn also vor einem Bruch ein „ – “ steht, so ändert dieses Minus jedes einzelne Vorzeichen im Zähler des nachfolgenden Bruches!)*

Beispiele:

$$\frac{7x}{8} + \frac{14y}{8} = \frac{7(x+2y)}{8}$$

oder

Dieser Bruch muss jetzt mit 2 erweitert werden, damit er den gleichen Nenner hat! Also **Zähler und Nenner erweitern**!

$$\frac{6x}{4y} + \frac{6x}{8y} = \frac{12x}{8y} + \frac{6x}{8y} = \frac{18x}{8y} = \frac{9x}{4y}$$

Damit die Brüche verglichen werden können, braucht es **gleich grosse Stücke (=gleiche Nenner)**, also **gleichnamig** machen.

$$\frac{5x}{2ac} + \frac{3}{5cd} = \frac{25dx}{10acd} + \frac{6a}{10acd} = \frac{6a + 25dx}{10acd}$$

➔ Im Nenner müssen alle verschiedenen Faktoren vorkommen, also die 2, die 5, a, c und d. Das ergibt dann den Nenner 10acd. Ob du den richtigen Hauptnenner hast, kannst du einfach überprüfen: Wenn du aus dem Hauptnenner jeden einzelnen Nenner bilden kannst, ist es richtig.

Zuerst **alle Nenner als Produkt schreiben**. Im letzten Nenner erkennen wir eine 3. binomische Formel!

Jeden einzelnen Bruch mit den „fehlenden“ Faktoren zum Hauptnenner erweitern.

$$\frac{3x}{2x-5} - \frac{x}{2x+5} - \frac{4x}{4x^2-25} = \frac{3x}{2x-5} - \frac{x}{2x+5} - \frac{4x}{(2x-5)(2x+5)} = \frac{3x\mathbf{(2x+5)}}{(2x-5)\mathbf{(2x+5)}} - \frac{x\,\mathbf{(2x-5)}}{\mathbf{(2x-5)}(2x+5)} - \frac{4x}{(2x-5)(2x+5)}$$

Jeden Zähler müssen wir jetzt ausrechnen / ausmultiplizieren

$$= \frac{6x^2 + 15x}{(2x-5)(2x+5)} - \frac{2x^2 - 5x}{(2x-5)(2x+5)} - \frac{4x}{(2x-5)(2x+5)}$$

Alles auf einen Bruchstrich schreiben, auf die Minus vor Brüchen achten, die Vorzeichen im Zähler der betreffenden Brüchen beeinflussen.

$$= \frac{6x^2 + 15x - 2x^2 \mathbf{+} 5x - 4x}{(2x-5)(2x+5)}$$

Vereinfachen, ausklammern.
Kann ich noch kürzen? (Hier nein, da keine gleichen Faktoren vorhanden sind!)

$$= \frac{4x^2 + 16x}{(2x-5)(2x+5)} = \frac{\mathbf{4x\,(x+4)}}{\mathbf{(2x-5)(2x+5)}}$$

Notizen / Fragen?

Aufgaben „Addition und Subtraktion von Bruchtermen“

1. Forme die Terme so weit wie möglich um:

a) $\frac{2x}{3} + \frac{4x}{3}$ =

b) $\frac{6x-3z}{2a} - \frac{4x-3z}{2a}$ =

c) $\frac{2b}{15c} + \frac{8b+3}{9c}$ =

d) $\frac{a}{a+b} + 1$ =

e) $4a - \frac{4a^2+5}{a-1}$ =

f) $\frac{3x}{2x-5} - \frac{x}{2x+5} - \frac{4x}{4x^2-25}$ =

g) $\frac{a-2}{(a-4)^2} - \frac{a-2}{a^2-7a+12}$ =

h) $\frac{m+2}{m^2-10m+24} + \frac{3}{m-4}$ =

i) $\frac{2a-b}{2a-2b} - \frac{a-b}{3a+3b} - \frac{b(3b-a)}{3a^2-3b^2}$ =

5. Multiplikation und Division von Bruchtermen

Ein weiteres, uns sehr bekanntes Thema. Auch hier gibt es Zauberworte / Vorgehenstipps:

Multiplikation von Bruchtermen:

- **Alle Zähler und alle Nenner als Produkt** schreiben
- **Zähler mal Zähler** (also Multiplizieren aller Zähler miteinander)
- **Nenner mal Nenner** (also alle Nenner miteinander multiplizieren)
- Allenfalls **Kürzen**

Division von Bruchtermen:

- **Division heisst: Multiplikation mit der Kehrzahl → Also den Bruch NACH dem „ : “ umkehren.**
- Dann alle **Zähler und alle Nenner als Produkt schreiben**
- **Zähler mal Zähler** (also Multiplizieren aller Zähler miteinander)
- **Nenner mal Nenner** (also alle Nenner miteinander multiplizieren)
- Allenfalls **Kürzen**

Beispiele zur Multiplikation von Bruchtermen

$$\frac{21az^3}{55b^2y} \bullet \frac{22by^2}{35z} = \frac{21az^3 \bullet 22by^2}{55b^2y \bullet 35z} = \frac{3az^2 \bullet 2y}{5b \bullet 5} = \mathbf{\frac{6az^2y}{25b}}$$

Zähler MAL Zähler und **Nenner MAL Nenner**

Kürzen *(möglichst vor dem Ausrechnen, erspart Arbeit)*

Ausrechnen

$$\frac{4x + 4y}{9} \bullet \frac{a - c}{6x + 6y} = \frac{4(x + y)}{9} \bullet \frac{(a - c)}{6(x + y)} = \frac{4(x + y) \bullet (a - c)}{9 \bullet 6(x + y)} = \frac{2 \bullet (a - c)}{9 \bullet 3} = \mathbf{\frac{2(a-c)}{27}}$$

Zähler und Nenner als Produkt schreiben

Zähler MAL Zähler und **Nenner MAL Nenner**

Kürzen *(möglichst vor dem Ausrechnen, erspart Arbeit)*

Ausrechnen (Produkt-schreibweise stehen lassen)

Beispiele zur Division von Bruchtermen

$$\frac{120a^4mx^3}{121by^2} : \frac{24am^2x}{11b^2y} = \frac{120a^4mx^3}{121by^2} \bullet \frac{11b^2y}{24am^2x} = \frac{120a^4mx^3 \bullet 11b^2y}{121by^2 \bullet 24am^2x} = \frac{5a^3x^2 \bullet b}{11y \bullet m} = \mathbf{\frac{5a^3bx^2}{11my}}$$

Multiplikation mit Kehrzahl!

Zähler MAL Zähler und **Nenner MAL Nenner**

Kürzen *(möglichst vor dem Ausrechnen, erspart Arbeit)*

Ausrechnen (Produkt-schreibweise stehen lassen)

$$\frac{a^2 - 9}{a^2 - 16} : \frac{a - 3}{a + 4} = \frac{a^2 - 9}{a^2 - 16} \bullet \frac{a + 4}{a - 3} = \frac{(a - 3)(a + 3)}{(a - 4)(a + 4)} \bullet \frac{(a + 4)}{(a - 3)} = \frac{(a - 3)(a + 3) \bullet (a + 4)}{(a - 4)(a + 4) \bullet (a - 3)} = \frac{(a + 3)}{(a - 4)} = \mathbf{\frac{a + 3}{a - 4}}$$

Multiplikation mit Kehrzahl!

Zähler und Nenner als Produkt schreiben *(hier 3. Binomische Formel)!*

Zähler MAL Zähler und **Nenner MAL Nenner**

Kürzen *(möglichst vor dem Ausrechnen, erspart Arbeit)*

Für das Verwandeln in Produktschreibweise verwenden wir:

- Ausklammern
- Binomische Formeln (1, 2, 3)
- Trinome in ein Produkt von Binomen verwandeln *(mit Hilfe von Summe und Produkt!)*

Aufgaben „Multiplikation und Division von Bruchtermen“

1. Forme die Terme so weit wie möglich um:

a) $\frac{a + b}{c} \bullet \frac{a - b}{c} =$

b) $\frac{m - n}{3m} \bullet \frac{5m}{2m - 2n} =$

c) $\frac{4fg}{h} : \frac{2fg}{h} =$

d) $\frac{m^2 - mn}{5} : (3m - 3n) =$

e) $\frac{a^2 - b^2}{8x^2} \bullet \frac{10x}{a - b} =$

f) $\frac{x^2y - y}{xy^2 - x} : \frac{xy - y}{xy + x} =$

g) $\frac{a^2 - 2a + 1}{10x^2} \bullet \frac{15x^3}{2a^2 - 2} =$

h) $\frac{4a^2 - 12a + 9}{a^2 - 10a + 25} : \frac{4a^2 - 9}{a^2 - 25} =$

i) $\frac{4a^2 + 20ab + 25b^2}{a^2 - b^2} : \frac{2a + 5b}{a - b} =$

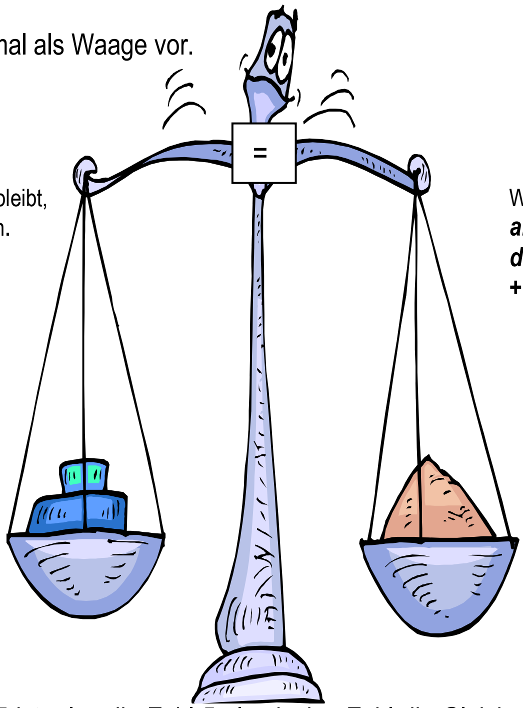
6. Gleichungen mit Bruchtermen

a) Gleichungslösung Grundidee

Zur Erinnerung: Gleichungen sind eine Art mathematisches Rätsel. Es geht darum herauszufinden, welche Zahlen du für die Unbekannte (Variable) einsetzen kannst, damit die Gleichung stimmt (also die Waage ausgeglichen steht). **Du suchst einen Zahlwert für x, welcher die rechte und die linke Seite der Gleichung gleichwertig macht.**

Dazu musst du meistens „umbeigen", also die Variabelterme auf eine Seite bringen und die Zahlterme auf die andere Seite. Bei all diesen Umstellungen ist es aber wichtig, dass du immer auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Operation durchführst, da sonst die Waage aus dem Gleichgewicht gerät (oder eben die Terme nicht mehr gleichwertig sind).

Stell dir die Gleichung einmal als Waage vor.



3x + 7	=	57 – 7x

damit die Waage im Gleichgewicht bleibt, müssen auch hier 7x addiert werden.

Wir wollen die x auf die andere Seite schaffen, ***also müssen wir hier 7x addieren! (Es stören die „-7x" also müssen wir die Gegenoperation + 7x durchführen)***

3x + 7 **+ 7x**	57 – 7x **+ 7x**
10x + 7	57
10x + 7 **- 7**	57 **-7**
10x	50
10x **: 10**	50**:10**
x	5

Wir finden heraus, dass x = 5 ist, also die Zahl 5 als einzige Zahl die Gleichung erfüllt. Das können wir testen, in dem wir sie einsetzen.

3 • **5** + 7 = 57 - 7• **5,** also 15 + 7 = 57 – 35 oder besser gesagt 22 = 22.

b) Vorgehen zum Auflösen von Gleichungen

<u>Allgemeines Lösungsschema:</u>

1. Termvereinfachungen (und alle Nenner als Produkt schreiben)
2. Multiplikation mit dem Hauptnenner
3. Termvereinfachungen
4. Isolieren der Lösungsvariable durch Äquivalenzumformungen.
5. Lösungsmenge angeben

Sobald du aber multiplizierst, musst du jeden einzelnen Zähler links und rechts der Gleichung mit dem entsprechenden Faktoren multiplizieren. **Du erkennst diese einzelnen Stücke daran, dass sie durch ein „ + " oder ein „ - " getrennt sind**.

Beim Auflösen musst du erst im letzten Schritt dividieren (teilen), und zwar durch die Zahl, die vor dem x steht.

Erinnerung zur Schreibweise der Lösungsmenge von Ungleichungen:

$\mathbb{L} = \{ x \in \mathbb{Q} \setminus x > 34\}$

Also: x ist Element der Grundmenge für die gilt: x > 34 (oder einfach die letzte Zeile der aufgelösten Ungleichung)

b) Beispiele zu Gleichungen ohne die Lösungsvariable im Nenner

$\frac{5x}{8} - \frac{2-x}{3}$	$= \frac{x}{2} + \frac{6x-3}{15}$	¦ • HN (120)
$\mathbf{15 \bullet} 5x \mathbf{- 40 \bullet}(2-x)$	$= \mathbf{60 \bullet} x \mathbf{+ 8 \bullet}(6x-3)$	¦ Vereinfachen *(Vorsicht bei Vorzeichen!)*
$75x - 80 \mathbf{+} 40x$	$= 60x + 48x - 24$	¦ Vereinfachen
$115x - 80$	$= 108x - 24$	¦ - 108 x
$7x - 80$	$= -24$	¦ + 80
$7x$	$= 56$	¦ :7
x	$= 8$	**$\mathbb{L} = \{ 8 \}$**

b) Beispiele zu Gleichungen mit der Lösungsvariablen im Nenner

$\frac{8}{x^2 - 3x}$	$= \frac{x+6}{x^2-9}$	¦ Alle Nenner als Produkt schreiben
$\frac{8}{x(x-3)}$	$= \frac{x+6}{(x-3)(x+3)}$	¦ **Bestimmen der Definitionsmenge (siehe unten)** **$\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-3, 0, 3)$**
$\frac{8}{x(x-3)}$	$= \frac{x+6}{(x-3)(x+3)}$	¦ • HN $x(x-3)(x+3)$
$8\mathbf{(x+3)}$	$= \mathbf{x}\,(x+6)$	¦ Vereinfachen
$8x + 24$	$= x^2 + 6x$	¦ Quadratische Gleichung → alles auf eine Seite also – 8x – 24
0	$= x^2 - 2x - 24$	¦ Produktschreibweise *(mit Hilfe von Produkt und Summe)*
0	$= (x+4)(x-6)$	¦ Jede Klammer einzeln = 0 setzen

$x_1 = -4$
$x_2 = +6$ ¦ Überprüfen, ob die Lösungen in der Definitionsmenge sind

$\mathbb{L} = \{ -4, 6\}$

Definitionsmenge:

Die **Definitionsmenge ist enorm wichtig, wenn die Lösungsvariable im Nenner vorkommt**. Der Grund dafür ist schnell erklärt:

Eine Division durch Null ist nicht definiert.

→ Wenn auch nur ein Nenner in der ursprünglichen Gleichung durch die gefundene Lösung (x) zu Null wird, ist die ganze Gleichung nicht mehr definiert.

Diesem Problem beugt man vor, in dem man von **Vornherein gewisse Lösungsmöglichkeiten ausschliesst**, die Grundmenge um die „nicht erlaubten" Lösungen verkleinert. (Diese **„verkleinerte Grundmenge" heisst Definitionsmenge**)

Bestimmung der Definitionsmenge (im obigen Beispiel):

- *Jeden einzelnen Nenner für sich betrachten:*
  Folgende Nenner kommen vor: $x(x-3)$ und $(x-3)(x+3)$
- *Überlegen, welches „x" den einzelnen Nenner zu Null macht (also die Nenner = 0 setzen):*
  $x(x-3) = 0$ und $(x-3)(x+3) = 0$
- *Die Lösungen dieser Überlegung müssen anschliessend aus den möglichen Lösungen ausgeschlossen werden.*
  $x(x-3) = 0$ und $(x-3)(x+3) = 0$

Lösungen:
$x = 0$ und $x = +3$

Lösungen:
$x = -3$ und $x = +3$

Für die Gleichung kommen also die Lösungen 0, - 3 und + 3 nicht in Frage!

Die Definitionsmenge wird so geschrieben (aus dem obigen Beispiel):

$$\mathbb{D} \quad = \quad \mathbb{Q} \quad \setminus \quad \{-3, 0, 3)$$

$\mathbb{D}$	$=$	$\mathbb{Q}$	$\setminus$	$\{-3, 0, 3)$
Definitionsmenge		Grundmenge (hier ist $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$)	„ohne"	hier folgen alle „ausgeschlossenen" Möglichkeiten für x, da diese jeweils einen der Nenner zu Null werden lassen.

Bei Gleichungen mit der Lösungsvariable im Nenner kommen zudem noch die zwei Begriffe „Gewinn- und Verlustumformung" vor. Die „**Gewinnumformung" bedeutet, dass bei der Multiplikation mit der Lösungsvariable zusätzliche Lösungen gewonnen werden, die eigentlich keine Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind.**

Bei der **Division durch die Lösungsvariable dagegen findet eine „Verlustumformung" statt**, das bedeutet, dass dabei Lösungen der ursprünglichen Gleichung verloren gehen können.

Aus diesem Grund ist die Probe bei solchen Gleichungen (Lösungsvariable im Nenner, Wurzelgleichungen) zwingend nötig.

Allgemeines Lösungsschema für Gleichungen mit der Lösungsvariablen im Nenner:

1. **Definitionsmenge bestimmen (jeden Nenner = 0 setzten und Lösungen ausschliessen)**
2. Termvereinfachungen (und alle Nenner als Produkt schreiben)
3. Multiplikation mit dem Hauptnenner
4. Termvereinfachungen
5. Isolieren der Lösungsvariable durch Äquivalenzumformungen.
6. **Gefundene Lösungen mit der Definitionsmenge vergleichen und Probe machen**
7. Lösungsmenge angeben.

Die Punkte 1 und 6 sind neu, der Rest ist identisch zum Lösungsschema aller bisher bekannten Gleichungen.

c) Beispiele zu Wurzelgleichungen

Vorbemerkung:

Die Quadratwurzel aus einer Zahl r ($r \geq 0$) ist $z = \sqrt{r}$

Die Wurzel aus einer negativen Zahl ist für uns nicht bestimmbar. Die Aufgabe $\sqrt{-r}$ ist unlösbar.

Wenn wir eine Wurzel ziehen, erhalten wir **immer zwei Lösungen! (Die Zahl und ihre Gegenzahl), denn** $\sqrt{4} = \pm 2$, weil $(-2) \bullet (-2) = 2 \bullet 2 = 4$. **Also gilt:** $\sqrt{r} = \pm z$

Beispiel:

$2 + \sqrt{x} = x$	¦ - 2	
$\sqrt{x} = x - 2$	¦ Quadrieren	Achtung, GEWINNUMFORMUNG!
$x = (x-2)^2$	¦ Vereinfachen	
$x = x^2 - 4x + 4$	¦ - x	
$0 = x^2 - 5x + 4$	¦ Produktform suchen	
$0 = (x-1)(x-4)$	¦ Fallunterscheidung, weil Produkt = 0, wenn mind. ein Faktor = 0	

Fall 1: $x-1 = 0 \rightarrow x = 1$

Fall 2: $x-4 = 0 \rightarrow x = 4$ Mögliche Lösungen: 1, 4

Probe machen! (Einsetzen der gefundenen Lösungen in die ursprüngliche Gleichung $2 + \sqrt{x} = x$

Lösung 1: $x = 1$: $2 + \sqrt{1} = 1$ ➔ $2 + 1 = 1$ ist falsch. (1 ist also keine Lösung)

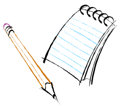
Lösung 2: $x = 4$: $2 + \sqrt{4} = 4$ ➔ $2 + 2 = 4$ ist richtig. (4 ist also Lösung)

Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = \{ 4 \}$

Quadrieren ist eine Gewinnumformung (Multiplikation mit der Lösungsvariablen). **Darum muss immer die Probe gemacht werden!**

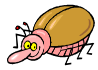
Lösungstechnik für Wurzelgleichungen:

1. **Isolieren des Wurzelterms** (durch Äquivalenzumformungen) ➔ **Wurzelterm muss alleine stehen**!
2. **Quadrieren beider Seiten (Vorsicht, Klammern setzen!)**
3. Wurzelfreie Gleichung lösen (Gemäss bisher bekanntem Schema)
4. **PROBE machen**
5. Lösungsmenge angeben

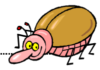


Aufgaben „Gleichungen in Q (mit und ohne Lösungsvariable im Nenner, Wurzelgleichungen)“

1. Löse die folgenden Gleichungen / Ungleichungen ohne die Lösungsvariable im Nenner. Bestimme die Lösungsmenge ($\mathbb{G} = \mathbb{Q}$).

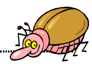


a) $\frac{x+5}{4} - \frac{1-x}{6} = 4$



b) $\frac{3x-19}{15} - \frac{x}{18} = \frac{x-12}{10}$

c) $6 - \frac{x}{6} = \frac{x-7}{3} + 2x$



d) $\frac{2x-5}{3} < \frac{3x-1}{2}$

e) $\frac{x - 7}{4} - \frac{x - 4}{7} < \frac{3x - 18}{14} + 1$

f) $x - \frac{4 + 3x}{3} \geq \frac{x}{4} + \frac{1}{6}$

2. Löse die folgenden Gleichungen / Ungleichungen mit der Lösungsvariable im Nenner. Bestimme zuerst die Definitionsmenge, danach die Lösungsmenge ($\mathbb{G} = \mathbb{Q}$).

a) $x + \frac{16}{x - 3} = 13$

b) $\frac{4}{x + 2} + \frac{5}{x^2 - 4} = \frac{15}{x - 2}$

c) $\frac{x}{x+2} - \frac{x}{x+3} = \frac{3}{x^2+5x+6}$

d) $\frac{5}{3-x} - 1 = \frac{2}{3}$

e) $\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$

f) $\frac{x-7}{x+5} - \frac{x-3}{2x+10} = 2$

g) $\frac{8}{y^2 + 4y - 5} = \frac{4}{y^2 + 7y + 10}$

h) $\frac{1}{x - 7} - \frac{3}{x + 7} = \frac{3x - 5}{x^2 - 49}$

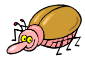
3. Löse die folgenden Wurzelgleichungen und bestimme die Lösungsmenge ($\mathbb{G} = \mathbb{Q}$).

a) $4\sqrt{x + 5} = x + 8$

b) $4\,(\sqrt{x} + 1) = x + 8$

4. Stelle eine Gleichung auf und löse sie anschliessend ($\mathbb{G} = \mathbb{Q}$). Antworte in einem Satz.

a) Zähler und Nenner eines Bruches verhalten sich wie 3:5. Subtrahiert man von Zähler und Nenner je 39, so erhält man einen Bruch vom Wert $-\frac{3}{8}$. Berechne den ursprünglichen Bruch.



b) In einem Basketballspiel beträgt die Punktedifferenz $\frac{1}{6}$ der Punkte des Verliererteams. Hätten die Verlierer nur vier Fünftel ihrer Punkte erzielt, so betrüge die Differenz sogar ganze 33 Punkte. Wie lautete der Punktestand zum Spielende?

c) Bei einer zweistelligen Zahl ist die Zehnerziffer um 3 kleiner als die Einerziffer. Die Quersumme der Zahl beträgt $\frac{5}{23}$ der Zahl selber. Wie heisst die Zahl ?

d) Dividiert man 5 durch eine Zahl, erhält man gleich viel, wie wenn man 8 durch eine Zahl dividiert, die um 6 kleiner ist als die Unbekannte. Wie heisst die unbekannte Zahl?

e) Wenn man vom Doppelten der Wurzel der Zahl das Dreifache dieser Zahl subtrahiert, erhält man die Zahl selbst