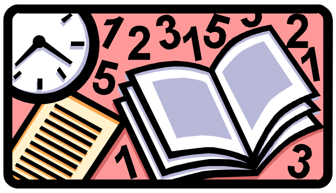
Name:



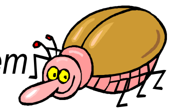
Mathematik-Dossier
Grundoperationen in der Menge N_0

Inhalt:

- **Die erste Stufe der Operationen: Addition und Subtraktion und ihre Verbindung**
- **Die zweite Stufe der Operationen: Multiplikation und Division und ihre Verbindung**
- **Die Verbindung von Operationen verschiedener Stufe (ohne Distributivgesetz)**
- **Das Distributivgesetz und seine Anwendung (Verbindung von Operationen erster und zweiter Stufe)**
- **Rechnen mit Grössen**
- **Mengenoperationen**

Verwendung:

Dieses Dossier dient der Repetition und Festigung innerhalb der obgenannten Themen. Es beinhaltet einen kurzen Theorie-Teil, sowie verschiedene Übungen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden.

Wichtig: Die Aufgaben erfordern ein konzentriertes Vorgehen. Es ist daher sinnvoll, mindestens während 15 Minuten am Stück daran zu arbeiten, mit Vorteil bearbeitest du ein ganzes Kapitel aufs Mal.

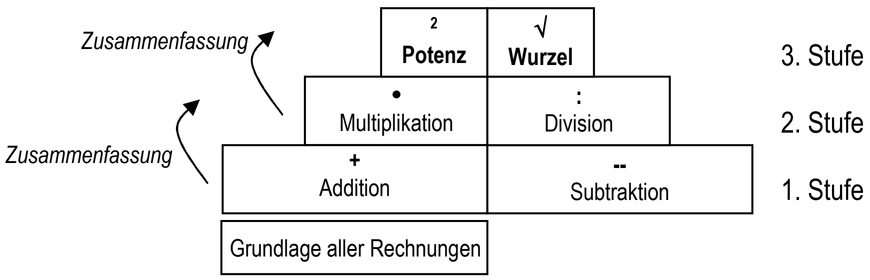
1. Die erste Stufe der Operationen – Addition und Subtraktion

1. Grundmenge für alle Operationen in $\mathbb{N}_0$:

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$.
Die Menge $\mathbb{N}_0$ umfasst also alle ganzen, positiven Zahlen inklusive der Null.

2. Die Operationen in der Übersicht:

Die „Mutter aller Rechnungen“ ist die Addition. Sie ist die Grundlage aller Rechnungen. Ihre Grundlage ist wichtig für alle anderen Stufen und Operationen, da sie alle auf der Addition aufbauen. Die 2. Stufen-Operationen Multiplikation (als Spezialfall der Addition) und Potenzrechnung (als Spezialfall der Multiplikation) genauso, wie die jeweiligen Umkehroperationen Subtraktion (Umkehrung der Addition), Division (Umkehrung der Multiplikation) und Wurzelrechnung (Umkehrung der Potenzrechnung). Das Pyramidenprinzip der Operationen sieht so aus:



Begriffe:

Operation		*Termbegriff*
Addition	➔	Summand + Summand = Summe
Subtraktion	➔	Minuend – Subtrahend = Differenz
Multiplikation	➔	Faktor • Faktor = Produkt
Division	➔	Dividend : Divisor = Quotient

3. Die Addition

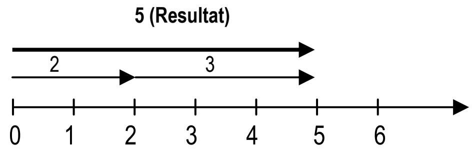
3.1 Begrifflichkeit: addieren = zusammenzählen

3.2 Schreibweise:

2 + 3 = **5**
„plus“ „gleich“

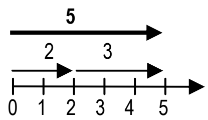
Summanden (bilden eine Summe) **Summe** (ausgerechnet)

3.3 Darstellungsform: Zahlenstrahl:

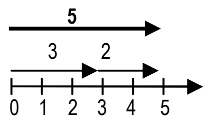


addieren heisst **Pfeile aneinanderreihen.** (Anfang an Spitz)

3.4 Gesetzmässigkeiten: **Die Addition ist kommutativ** (Das Vertauschen der Summanden ist erlaubt)



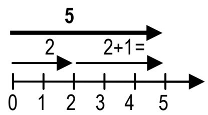
=

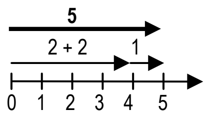


✓

Die Addition ist assoziativ (Summanden können beliebig verbunden werden)

2 + (2 + 1) = (2 + 2) + 1 = 5





✓

Das neutrales Element (verändert nichts) der Addition ist 0: weil 5 + 0 = 5 ✓

4. Die Subtraktion (Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition)

4.1 Begrifflichkeit: subtrahieren = wegzählen

4.2 Schreibweise:

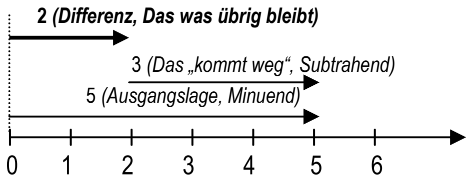
5 - 3 = **2**

„minus“ „gleich“

Minuend **Subtrahend** **Differenz**
(bilden eine Differenz) (ausgerechnet)

gilt, WEIL: $\overrightarrow{2 + 3 = 5}$ (von hinten her rechnen!)
(Die Begründung der Subtraktion ist die Addition)

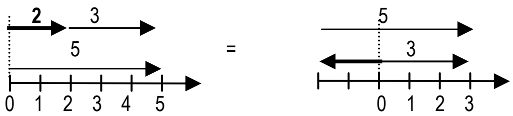
4.3 Darstellungsform: Zahlenstrahl:



subtrahieren heisst **Pfeile Spitz an Spitz ansetzen. Dann von 0 aus „auffüllen“**

4.4 Gesetzmässigkeiten: **Die Subtraktion ist nicht kommutativ.** (Minuend und Subtrahend nicht vertauschbar)

5 – 3 = 2 $\neq$ 3 – 5



Die Subtraktion ist nicht assoziativ. (Subtrahenden und Minuenden nicht verbinden):

5 – (2 – 1) $\neq$ **(5 - 2) - 1**

Das neutrale Element der Subtraktion ist 0: weil 5 - 0 = 5

5. Die Verbindung von Operationen erster Stufe (Addition und Subtraktion)

5.1 Grundlegende Vereinbarung: Rechne immer **von links nach rechts**

Einschränkung: *Klammern immer zuerst behandeln!*

5.2 Klammerregel:

Klammer auflösen →

13 + (7 - 15) = **13 + 7 - 15** *Der Wert des Terms darf nicht ändern!*

← ***Klammer setzen***

13 – (7 – 15) = 13 – 7 + 15 *Der Wert des Terms darf nicht ändern!*

+	• Steht **vor der Klammer ein Pluszeichen**, so darf die **Klammer weggelassen** werden.
— - +	• Steht v**or der Klammer ein Minuszeichen**, so darf die Klammer nur dann weggelassen werden, wenn die **Operationszeichen in der Klammer geändert** werden (aus Plus wird Minus, aus Minus wird Plus)

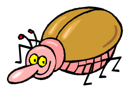
5.3 Das Operatorkonzept:

Ein **Operator** besteht aus dem **Operationszeichen und der nachfolgenden Zahl**.
(der „minus 27er“, der „plus 15er“, etc.)

$\boxed{14}\ \boxed{-\ 27}\ \boxed{+15} = \boxed{14}\ \boxed{+15}\ \boxed{-\ 27}$

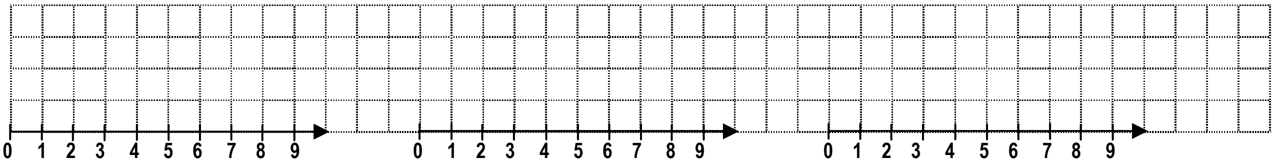
Der Austausch von ganzen Operatoren ist erlaubt.
(Wie das Umstellen eines Zuges!)

Aufgaben zu Addition und Subtraktion



1. Löse mit Hilfe von Pfeilen auf dem Zahlenstrahl:

a) 3 + 6 – 4 b) 8 – (4 + 2) c) 4 – 1 + 6



2. Schreibe die Rechnung aus und löse:

a) Wie heisst der Subtrahend, wenn die Differenz 6704 und der Minuend 9101 ist?

b) Bestimme den Minuenden, wenn der Subtrahend 6801 und die Differenz ein Drittel davon ist.

c) Subtrahend: 828 373.241; Differenz: 17 272.506; Minuend ?

d) Minuend: 0.0134679; Subtrahend: 0.012158; Differenz ?

e) Differenz: 163 717.238; Minuend: 336 282.762; Subtrahend ?

3. Setze in die Kästchen die richtigen Operationszeichen, damit wahre Aussagen entstehen

a) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 = 59

b) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 = 3

c) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 = 67

d) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 = 11

4. Schreibe ohne Klammern. Löse danach mit Hilfe des Operatorkonzeptes möglichst vorteilhaft:

Term *Ohne Klammern*

a) 1753 + (247 – 63) – (37 + 19) – (81 - 57) =

jetzt lösen mit Operatorkonzept:

b) 3470 - (670 - 490) - (390 + 460) - (840 - 520) =

jetzt lösen mit Operatorkonzept:

5. Berechne die folgenden Ausdrücke mit dem Operatorenkonzept und / oder durch Klammern setzen oder auflösen möglichst geschickt. Schreibe die Zwischenschritte auf.

a) 847 - 383 + 283 - 19 – 28

b) 884 - 446 - 54 + 313 + 527 - 240

c) 781 - 190 - 281 + 370 + 20

d) 778 + 15 + 622 - 155 + 840

e) 4832 + (3719 - 132) - (519 - 47)

f) 79 437 - (72 514 - 10 563) + (15 309 - 7486)

6. Welche Zahlen aus ℕ musst du für die Variable einsetzen, damit wahre Aussagen entstehen?

a) 430 - (70 - y) = 394 *y*=

b) 7500 + (5700 - z) = 2700 *z*=

c) 10^x - (9917 - 17) = 10^2 *x*=

d) 89 + (70 + x) = 220 *x*=

e) y - (720 - 510) = 660 *y*=

f) 716 - (10^y + 516) = 10^y *y*=

2. Die zweite Stufe der Operationen – Multiplikation und Division

1. Die Multiplikation (Sonderfall der Addition mit lauter gleichen Summanden)

1.1 Begrifflichkeit: multiplizieren = vervielfachen

1.2 Schreibweise:

$$\underbrace{4 + 4 + 4 + 4 + 4}_{\textbf{5} \text{ gleiche Summanden („4en“)}}$$

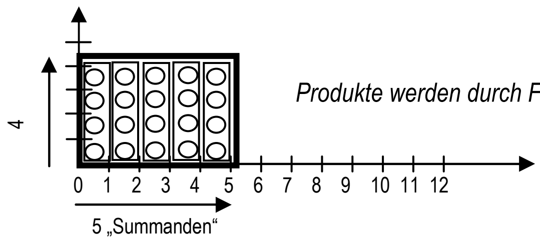
5 • 4 = **20**

„mal“ „gleich“

Faktor **Faktor** (bilden ein Produkt)

Produkt (ausgerechnet)

1.3 Darstellungsform: Punktdarstellung



Produkte werden durch Flächen dargestellt.

1.4 Gesetzmässigkeiten: **Die Multiplikation ist kommutativ.** (Das Vertauschen der Faktoren ist erlaubt).

4 • 3 = 3 • 4 ✓
12 = 12

Die Multiplikation ist assoziativ. (Das Verbinden von Faktoren ist zulässig).

(5 • 2) • 8 = 5 • (2 • 8) ✓
10 • 8 = 5 • 16
80 = 80

Das neutrale Element (verändert nichts) **der Multiplikation ist 1:** Weil 5 • 1 = 5

Spezialfall Null: **Ein Produkt ist gleich Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.**

5 • 0 = 0 15421 • 1565478974 • 0 • 45664 = 0

Dezimalzahlen: 15.3 • 7.286 = 111.4758
1 Dez. stelle 3 Dez. Stellen 4 Dezimalstellen (1 + 3)

Ein Produkt von Dezimalzahlen hat so viele Stellen nach dem Komma, wie die Summe aller Kommastellen der Faktoren ergibt.

2. Die Division (Umkehrung der Multiplikation)

2.1 Begrifflichkeit: dividieren = teilen / aufteilen

2.2 Schreibweise:

24 : 4 = **6** **weil 6 • 4 = 24** *(von hinten her rechnen)*

„durch“ „gleich“ Die Begründung der Division ist die Multiplikation)

Dividend **Divisor** **Quotient**
(bilden einen Quotienten) (ausgerechnet)

2.3 Gesetzmässigkeiten: **Die Division ist nicht kommutativ.** (Divisor und Dividend vertauschen ist nicht erlaubt):

$16 : 8 \neq 8 : 16$
$2 \neq \frac{1}{2}$

Die Division ist nicht assoziativ? (Das Setzen von Klammern funktioniert nicht):

$(12 : 6) : 2 \neq 12 : (6 : 2)$
$2 : 2 \neq 12 : 3$
$1 \neq 4$

Das neutrale Element (verändert nichts) **der Division ist 1:** weil 5 : 1 = 5

Spezialfall Null: Null als Dividend: 0 : 5 = 0 weil 0 • 5 = 0
0 : 17 = 0 weil 0 • 17 = 0

Wenn man Null durch eine Zahl dividiert, ergibt der Quotient Null

Null als Divisor: $6 : 0 \neq 0$, weil $0 \cdot 0 \neq 6$
0 : 0 = 0 weil 0 • 0 = 0 **?**
0 : 0 = 5 weil 5 • 0 = 0

Darum: **Die Division <u>durch Null</u> ist verboten**

3. Die Verbindung von Operationen zweiter Stufe (Multiplikation und Division)

3.1 Grundlegende Vereinbarung: Rechne immer **von links nach rechts**
Einschränkung: *Klammern immer zuerst behandeln.*

3.2 Klammerregel:

Klammer auflösen →

13 • (81 : 9) = **13 • 81 : 9** *Der Wert des Terms darf nicht ändern!*

← ***Klammer setzen***

36 : (4 • 3) = 36 : 4 : 3 *Der Wert des Terms darf nicht ändern!*

•	• Steht **vor der Klammer ein Malzeichen**, so darf die **Klammer weggelassen** werden.
: • ⇄ :	• Steht v**or der Klammer ein Divisionszeichen**, so darf die Klammer nur dann weggelassen werden, wenn die **Operationszeichen in der Klammer geändert** werden (aus Mal wird Durch, aus Durch wird Mal)

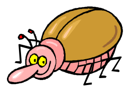
3.3 Das Operatorkonzept:

Ein **Operator** besteht aus dem **Operationszeichen und der nachfolgenden Zahl**.
(der „durch 9er“, der „mal 18er“, etc.)

84	: 9	• 18	=	84	• 18	: 9

Der Austausch von ganzen Operatoren ist erlaubt.
(Wie das Umstellen eines Zuges!)

Aufgaben zu Multiplikation und Division



1. Schreibe die Rechnung aus und löse:

a) Wie heisst der Quotient, wenn der Divisor 23, der Dividend 207 beträgt?

b) Bestimme das Produkt, wenn der eine Faktor 18 und der andere 7 ist.

c) Das Produkt beträgt 324, ein Faktor ist 9. Bestimme den zweiten Faktor.

d) Bestimme den Quotienten, wenn der Dividend gleich dem Produkt aus 2 und 33, der Divisor gleich 11 ist

e) Dividiere das Produkt aus 156 und 4 durch den Quotienten aus 416 und 4. Bestimme den Quotienten.

2. Setze in die Kästchen die richtigen Operationszeichen, damit wahre Aussagen entstehen

a) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 = 5
c) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 = 3920

b) 35 ☐ (28 ☐ 4) = 35 ☐ 28 ☐ 4 =245
d) 1008 ☐ (28 ☐ 4) = 1008 ☐ 28 ☐ 4 = 9

3. Schreibe ohne Klammern. Löse danach mit Hilfe des Operatorkonzeptes möglichst vorteilhaft:

Term	*Ohne Klammern*
a) 300 • (28 : 7) : (20 • 5) : (15 : 5) =	
jetzt lösen mit Operatorkonzept:	
b) 10 • (25 • 4) : (50 • 5) : (5 : (80: 4)) =	
jetzt lösen mit Operatorkonzept:	

4. Berechne die folgenden Ausdrücke mit dem Operatorenkonzept und / oder durch Klammern setzen oder auflösen möglichst geschickt. Schreibe die Zwischenschritte auf.

a) 820 : 10 : 41 : 2

b) 1851 : (617 : 15)

c) 999 • 2 : 9

d) 580 : 29 : 5 • 2

e) 156 • 18 : 13 : 2

5. Welche Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründe deinen Entscheid.

a) 0• 15 = 15 ○ w ○ f
d) 6 : 6 < 6 • 6 ○ w ○ f

b) 0: 15 = 0 ○ w ○ f
e) 12 : 0 = 0 • 15 ○ w ○ f

c) *15 : 0 = 0* ○ w ○ f

Fragen / Dinge auf die ich achten will: *(Raum für eigenen Notizen und Fragen)*

3. Die Verbindung von Operationen verschiedener Stufe

Operationen kommen selten nur in einer Stufe vor. Oft werden Multiplikation und Addition, Division und Subtraktion „bunt“ gemischt. Damit man trotzdem den Überblick behält, ist es wichtig, genaue Regeln zu haben, wie man mit den Verbindungen der verschiedenen Operationen umgehen muss.

1.1 Grundlegende Vereinbarung:

Rechne immer **von links nach rechts**

1. Einschränkung: ***Klammern** immer **zuerst**!*

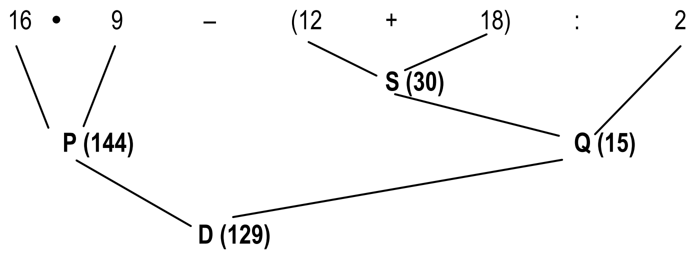
*2. Einschränkung: Operationen **höherer Stufe** haben **Vorrang** („Punkt vor Strich“, also 2. Stufe vor erster Stufe)!*

Der Grund für die 2. Einschränkung ist die Tatsache, dass die Operationen höherer Stufe stärker sind, als diejenigen tieferer Stufe. Dies liegt daran, dass die höhere Stufe ja als „Vereinfachung“ der tieferen Stufe gebildet wurde.

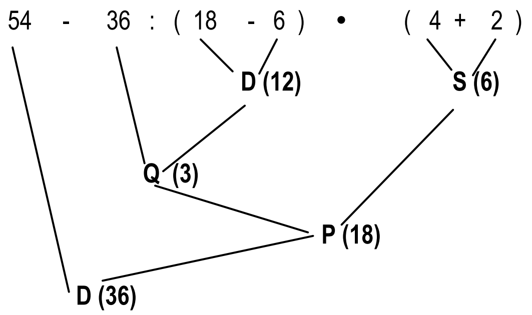
1.2 Termanalyse durch Strukturbaum:

Mit dem Strukturbaum versuchen wir, diese „Zusammengehörigkeit“ von einzelnen Teilen eines Terms darzustellen. So müssen wir die Rechenregeln immer der Reihe nach befolgen. Also zuerst immer alle Klammern behandeln, dann die Operationen höherer Stufe, dann diejenigen tieferer Stufe.

Die Abkürzungen bedeuten:
S = Summe (Summand + Summand)
D = Differenz (Minuend – Subtrahend)
P = Produkt (Faktor mal Faktor)
Q = Quotient (Dividend durch Divisor)



Kriterien:
Klammer zuerst
Punkt vor Strich
v. links n. rechts

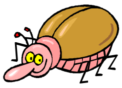


Kriterien:
Klammern zuerst
Punkt vor Strich / von links nach rechts
von links nach rechts

1.3 Welche Gesetze gelten? – Eine Übersicht

Kommutativ-Gesetz:	Addition und Multiplikation	
Assoziativ-Gesetz:	Addition und Muliptlikation	
Neutrales Element:	0	für Addition und Subtraktion (1. Stufe)
	1	für Muliplikation und Division (2.Stufe)
Speziell:	Division durch Null ist verboten!	

Aufgaben zur Verbindung Operationen verschiedener Stufe (ohne Distributivgesetz)



1. **Zeichne für die folgenden Terme einen Strukturbaum und bestimme die entsprechenden Resultate (schreibe gerade in den Strukturbaum hinein)**

a) $32 \cdot (5 - 2) + 15 : 3$

c) $(5 - 2 \cdot 2) \cdot 45 : 15 - 3$

b) $56 - (123 \cdot 2) : (8 - 2) + 4$

d) $3 \cdot (18 - 34 : 2) + 12345 - 23 \cdot 5$

2. **Schreibe die Rechnung aus und löse:**

a) Addiere zu 24 das Produkt von 7 und 12

b) Subtrahiere vom Quotienten von 108 und 18 das Produkt von 1 und der Summe aus 2 und 3

c) Dividiere die Summe von 26 und 13 durch ihre Differenz

d) Multipliziere den Quotienten von 12 und der Differenz aus 8 und 2 mit der Summe aus 3 und dem Vierfachen aus 3.

3. **Schreibe, wo nötig mit Klammern, so dass richtige Aussagen entstehen:**

a) $18 \cdot 8 - 3 = 90$

b) $90 - 88 + 5 \cdot 25 = 175$

c) $15 : 8 - 3 + 34 = 37$

4. **Bestimme den Wert der folgenden Terme. Notiere zur Sicherheit alle Zwischenschritte.**

a) $51 + 48 : 6 - 5 + 6 \cdot (5 + 8 : 4)$

b) $58 : (30 - 2 \cdot 6 + 33 : 3) - (6 : (4 - 1))$

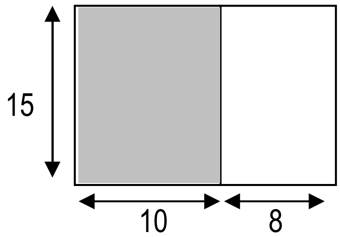
Fragen / Dinge auf die ich achten will: *(Raum für eigenen Notizen und Fragen)*

4. Das Distributivgesetz und seine Anwendung.

Das Distributivgesetz (oder „Verteilungsgesetz) hat zwei Anwendungsmöglichkeiten, nämlich Ausklammern und Ausmultiplizieren.

Betrachte die Fläche des unten abgebildeten Rechteckes. Sie berechnet sich bekanntlich „Länge mal Breite“ also 15 •18 = 270

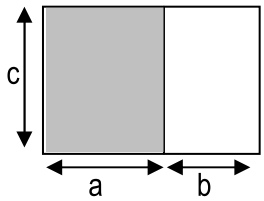
Du siehst auch, dass die Fläche 15 •18 gleich der Fläche 15 • 10+ 15 •8 ist, da man genausogut zuerst das graue Teilrechteck berechnen könnte und danach das weisse Teildreieck. Um die Fläche des ganzen Rechtecks zu erhalten, müssen wir die beiden Ergebnisse addieren. Ebenso könnten wir schreiben, dass die Länge des grossen Rechtecks gerade der Summe der beiden Teilstrecken 10 und 8 entspricht. Wir stellen also fest, dass 15 • 18 = 15 • 10 + 15• 8 = 15 • (10 + 8) ist.



Ausmultiplizieren: 15 • (10 + 8) = 15 • 10 + 15• 8. Der Faktor vor der Klammer muss also auf beide Summanden in der Klammer „verteilt“ werden.
Man muss von beiden Teilrechtecken die Fläche berechnen, also beide Teilstrecken mit der „Breite“ multiplizieren.

Ausklammern: 15 • 10 + 15• 8 = 15 • (10 + 8). Der gemeinsame Faktor (hier: die „Breite“ 15) wird ausgeklammert, man berechnet also zuerst die Summe der beiden Teilstrecken 10 + 8 und multipliziert dann erst mit 15.

Zusammengefasst:



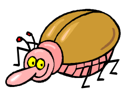
c • (a + b) = a • c + b • c

Ausmultiplizieren *(c auf a und b verteilen)*

a • c + b • c = c • (a + b)

Ausklammern *(gemeinsamer Faktor vor die Klammer)*

Übungen / Beispiele zum Distributivgesetz



Kreuze an, ob du Ausklammern oder Ausmultiplizieren musst und schreibe diese Form auf und rechne aus..

Beispiel:
34 • (4 – 2c) = **34 • 4 - 34•2c = 136 – 68 c**
(Ausmultiplizieren)

Achtung, manchmal ist der gemeinsame Faktor “versteckt”, z.B.
36 – 18 • x = **2•18 – 18•x = 18 • (2-x)**
(Ausklammern)

		Ausklammern	Ausmultiplizieren			Ausklammern	Ausmultiplizieren
a) 12 • (b + e)	....			h) 49 - 49 • n	....		
b) b • 17 – 7 •b	....			i) 64 + 16 •e	....		
c) 6 • (18 - y)	....			j) 7 • (p - 1)	....		
d) 13 • a + 39	....			k) 560 - z • 80	....		
e) 23 •x – x	....			l) a •17 - 17 •b	....		
f) 24 + r • 8	....			m) 63 - 7 • y	....		
g) (m - 3) •8	....			n) (x - 1) • 4	....		

5. Rechnen mit Grössen

Grössen verschiedener Art bestimmen unsere tägliches „Zahlen“ – Leben. So kaufen wir Gramm, Kilogramm oder Liter, fragen uns beim Skirennen, wer welche Zeit gefahren und wie viele Sekunden Rückstand auf den Sieger hat. Oder dann ärgern wir uns, dass die Temperatur zu tief oder die Sitzfläche im Restaurant zu klein ist. All diese Dinge haben eines gemeinsam**: Es handelt sich dabei um Grössen-Einheiten.** Die Zahl davor gibt lediglich noch an, wie viele dieser Einheiten vorliegen. Das Rechnen mit Grössen ist im Prinzip genau gleich, wie das Rechnen mit reinen Zahlen, doch muss man zusätzlich noch wissen, wie diese Grössen zusammenhängen und wie sie sich umrechnen lassen. Davon in diesem Kapitel.

10.1 Definition:

Eine Grösse besteht aus **Zahlenwert** und **Einheit.**

Bsp.: 3 m — Länge einer Strecke
3: Zahlwert der Länge
m: Einheit der Länge (Meter)

10.2 Verschiedene Basiseinheiten:

	Basiseinheit:	weitere Einheiten:
Länge	m	mm, cm, dm, km
Gewicht:	kg	mg, g, t
Zeit:	s	min, h, d
Temperatur:	K (Kelvin)	0°C = 273.15 K, 1 K = 1° C

10.3 abgeleitete Einheiten:

Ein Quadrat mit Seitenlänge 1m hat die Fläche von **1m²** (→ abgeleitete Einheit).
Ein Würfel mit Kantenlänge 1m hat das Volumen **1m³** (→ abgeleitete Einheit)

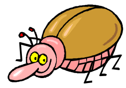
10.4 Übersicht über die Grössen:

Grösse / Einheit	Länge	Fläche	Volumen		Masse	Zeitdauer	Winkel
Kilo (k) (Tausend)	km	km²			**kg**	d ↑ : 24	
		↑ : 100				h	° (W-Grad)
Hekto (h) (Hundert)	↑ : 1000	ha ↑ : 100 ↑ :10⁶		hl	↑ :1000	↑ : 60	↑ : 60
		a ↑ : 100		↑ : 100		min ↑ : 60	´(W-Minute) ↑ : 60
	m	**m²**	**m³**	**l**	**g**	**s**	´´ (W-Sekunde)
	↓ •10	↓ •100	↓ •1000	↓ •10	↓		
Dezi (d) (Zehntel)	dm	dm²	dm³	dl			
	↓ • 10	↓ •100	↓ •1000	↓ •10	↓ •1000		
Centi (c) (Hunderstel)	cm	cm²	cm³	cl			
	↓ •10	↓ •100	↓ •1000	↓ •10	↓		
Milli (m) (Tausendstel)	mm	mm²	mm³	ml	mg		

Abgeleitete Einheiten

Basiseinheiten

Aufgaben zum Rechnen mit Grössen



1. Rechne die folgenden Grössen in die verlangte Einheit um:

a)	0.82 km	=		m	n)	0.17 m^3	=		dl
b)	0.82 km^2	=		m^2	o)	1 700 cm^3	=		dl
c)	0.82 m^3	=		cm^3	p)	17 000 cm^3	=		hl
d)	30.7 km^2	=		m^2	q)	4.3 dm^3	=		hl
e)	45 000 m	=		km	r)	0.43 l	=		cm^3
f)	45 000 m^2	=		km^2	s)	0.43 dl	=		dm^3
g)	45 000 000 cm^3	=		m^3	t)	430 m^3	=		l
h)	450 m^2	=		ha	u)	1.7 hl	=		m^3
i)	17 000 a	=		km^2	v)	$\frac{3}{20}$ ha	=		m^2
k)	17 ha	=		km^2	w)	$\frac{3}{5}$ cm^3	=		mm^3
l)	1.7 a	=		ha	x)	$\frac{1}{250}$ m^3	=		cm^3
m)	1 700 ha	=		m^2	y)	$\frac{7}{50}$ m^3	=		l

2. Ein leeres Reservoir, wird von einer Quelle gespiesen, die in jeder Sekunde 40 dl Wasser liefert. Wie viel Wasser enthält das Reservoir nach 2 Stunden 40 Minuten?

3. Ein quaderförmiger Trog, der 3.5 m lang, 2.4 m breit und 1 m hoch ist, könnte in 20 min mit Wasser gefüllt werden.
   a) Wie viele Liter Wasser enthält der Trog nach 14 Minuten?
   b) Wie hoch steht das Wasser nach 12 Minuten?

4. Jeder Mensch nimmt täglich durchschnittlich 1.2 Liter Wasser in flüssiger Form zu sich. Man kann – als Gedankenexperiment – die Wassermenge, welche die auf 7 Milliarden angewachsene Menschheit täglich zu sich nimmt, in einen Quader mit der Grundfläche 1 km^2 giessen. Wie hoch wird das Wasser im Quader stehen?

5. Ein Händler liefert einem Wirt versehentlich 56 Schachteln Traubensaft, die je 12 Flaschen zu 7 dl enthalten statt solche zu 50 cl. Der Wirt erklärt sich freundlicherweise bereit, die Lieferung gleichwohl entgegenzunehmen. Wie viel Traubensaft hat er nun über seine Bestellung hinaus eingekauft?

6. Die Summe der Grössen zweier Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 147° 23' 57". Bestimme die Grösse jedes Dreieckswinkels.

7. a) Wie viele Sekunden hat ein Tag?
   b) Wie viele Bogensekunden sind insgesamt in einem Dreieck?

8. Wie gross wäre der Fehler nach 130 Jahren, wenn man das Jahr statt zu 365 d 5 h 48 min 47 s zu 365 d 6 h rechnen würde?

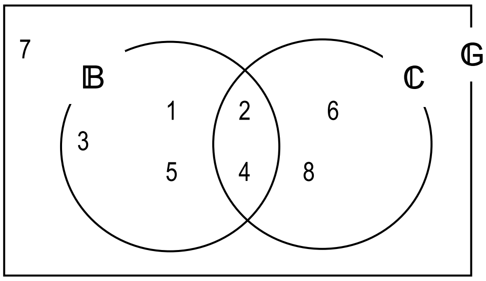
9. Am frühen Nachmittag eines Wandertages vergnügt sich eine Schulklasse auf einer Spielwiese. Um 19.25 Uhr fährt der Zug im 10 km entfernten Steg ab. Wann muss der Lehrer mit der Klasse aufbrechen, wenn er pro Stunde 4 km zurückzulegen gedenkt und eine Viertelstunde vor Abfahrt des Zuges auf dem Bahnhof sein will?

10. Um welche Zeit fährt ein Zug in Winterthur ab, der 38 Minuten später in St. Gallen ankommt, nämlich 14 Minuten später als ein Zug, der um 07.10 Uhr in Appenzell abgefahren ist und für die Fahrt nach St. Gallen 45 Minuten benötigt hat? (Skizze)

6. Mengenoperationen

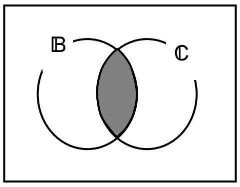
Mit Mengen hast du im Mathematikbuch vor dem Rechnen in $\mathbb{N}_0$ gearbeitet. Vielleicht erinnerst du dich noch? Auf jeden Fall kommen bei der Mengenlehre die Venn-Diagramme vor. Zum Beispiel so wie hier dargestellt:

Es sei $\mathbb{G} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\mathbb{B} = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ und $\mathbb{C} = \{ 2, 4, 6, 8 \}$.



Die Schnittmenge ($\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$)

<u>Venndiagramm (Bereich):</u>



<u>Definition:</u>
Die **Schnittmenge** $\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$ ist die Menge mit allen Elementen, die **zu $\mathbb{B}$ und zu $\mathbb{C}$** gehören.

<u>In Worten:</u>
$\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$ heisst **„$\mathbb{B}$ geschnitten mit $\mathbb{C}$"**

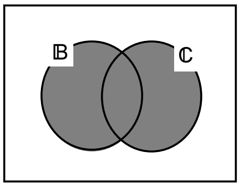
Es gilt dabei: $\mathbb{B} \cap \mathbb{C} = \mathbb{C} \cap \mathbb{B}$ *(Kommutativgesetz)*

➔ *Zur Schnittmenge gehören also alle **Elemente, die gleichzeitig Element von allen beteiligten Mengen** sind.*

In unserem Beispiel ist : $\mathbb{B} \cap \mathbb{C} = \{ 2, 4 \}$

Die Vereinigungsmenge ($\mathbb{B} \cup \mathbb{C}$)

<u>Venndiagramm (Bereich):</u>



<u>Definition:</u>
Die **Vereinigungsmenge** $\mathbb{B} \cup \mathbb{C}$ ist die Menge mit allen Elementen, die **zu $\mathbb{B}$ oder zu $\mathbb{C}$** gehören. (Nicht vergessen: Das „oder" ist in der Mathematik ein „und-oder")

<u>In Worten:</u>
$\mathbb{B} \cup \mathbb{C}$ heisst **„$\mathbb{B}$ vereinigt mit $\mathbb{C}$"**

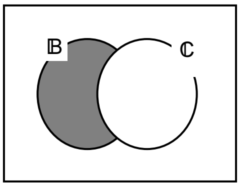
Es gilt dabei: $\mathbb{B} \cup \mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \mathbb{B}$ *(Kommutativgesetz)*

➔ *Zur Vereinigungsmenge gehören also alle **Elemente, die Element von der einen, der anderen oder beiden beteiligten Mengen** sind.*

In unserem Beispiel ist : $\mathbb{B} \cup \mathbb{C} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 \}$

Die Restmenge ($\mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$)

<u>Venndiagramm (Bereich):</u>



<u>Definition:</u>
Die **Restmenge** $\mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$ ist die Menge mit allen Elementen, die **zu $\mathbb{B}$**, **aber nicht zu** $\mathbb{C}$ gehören (manchmal liest man auch: *„zu $\mathbb{B}$ und nicht zu $\mathbb{C}$"*)

<u>In Worten:</u>
$\mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$ heisst **„$\mathbb{B}$ ohne $\mathbb{C}$"**

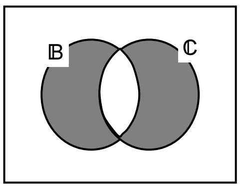
Es gilt dabei: $\mathbb{B} \setminus \mathbb{C} \neq \mathbb{C} \setminus \mathbb{B}$ *(Nicht kommutativ)*

➔ *Zur Restmenge gehören also alle **Elemente, die ausschliesslich von einer der beteiligten Mengen** sind.*

In unserem Beispiel ist : $\mathbb{B} \setminus \mathbb{C} = \{ 1, 3, 5 \}$, ***aber*** $\mathbb{C} \setminus \mathbb{B} = \{ 6, 8 \}$

Spezielle Kombinationen dieser Mengenschreibweisen

<u>„Entweder $\mathbb{B}$ oder $\mathbb{C}$":</u>

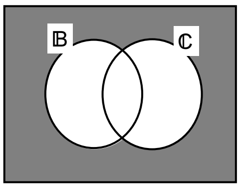


➔ *Elemente, die in einer der Mengen, ABER NICHT IN BEIDEN sind.*

$(\mathbb{B} \setminus \mathbb{C}) \cup (\mathbb{C} \setminus \mathbb{B})$

„Vereinigungsmenge der beiden Restmengen"

<u>„Weder $\mathbb{B}$ noch $\mathbb{C}$":</u>



➔ *Elemente, die ein keiner der der Mengen sind.*

$\overline{\mathbb{B} \cup \mathbb{C}}$ oder $\overline{\mathbb{B}} \cap \overline{\mathbb{C}}$

„Ergänzungsmenge der beiden Vereinigungsmengen."
oder: „Schnittmenge der beiden Ergängzungsmengen"

Spezielle Mengenoperationen:

Schnittmengen			
	$\mathbb{B} \cap \mathbb{B}$	=	$\mathbb{B}$
	$\mathbb{G} \cap \mathbb{B}$	=	$\mathbb{B}$
	$\mathbb{B} \cap \{\}$	=	$\{\}$
	$\mathbb{B} \cap \overline{\mathbb{B}}$	=	$\{\}$

Vereinigungsmenge			
	$\mathbb{B} \cup \mathbb{B}$	=	$\mathbb{B}$
	$\mathbb{G} \cup \mathbb{B}$	=	$\mathbb{G}$
	$\mathbb{B} \cup \{\}$	=	$\mathbb{B}$
	$\mathbb{B} \cup \overline{\mathbb{B}}$	=	$\mathbb{G}$

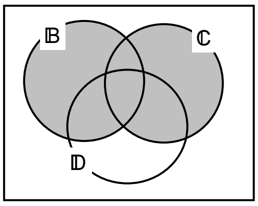
Restmengen			
	$\mathbb{B} \setminus \mathbb{B}$	=	$\{\}$
	$\mathbb{G} \setminus \mathbb{B}$	=	$\overline{\mathbb{B}}$
	$\mathbb{B} \setminus \{\}$	=	$\mathbb{B}$
	$\mathbb{B} \setminus \overline{\mathbb{B}}$	=	$\mathbb{B}$

Umformung von Mengen-Operationen
Mit etwas Phantasie kann man diverse Umformungsbeispiele finden. Für die Bearbeitung ist es unerlässlich, dass man versucht, mit Farben zu arbeiten. Ansonsten verliert man schnell den Überblick.

Auch bei den Mengenoperationen gilt: Rechne **von links nach rechts**
1. Einschränkung: **Klammern** sind **vorrangig** zu bearbeiten

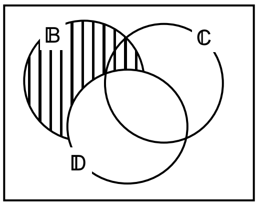
Beispiel für das Lösen einer komplizierten Mengenoperation:
Schraffiere folgende Menge: $(\mathbb{B} \cup \mathbb{C}) \cap (\mathbb{B} \setminus \mathbb{D})$

Vorgehen: 1. Klammern zuerst bestimmen und die entsprechenden Mengen schraffieren *(Hier aus technischen Gründen in zwei Diagrammen, mit Farbe kann das gut in einem Diagramm gezeichnet werden!)*

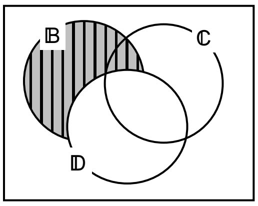


Farbcode: $\mathbb{B} \cup \mathbb{C}$

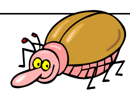
$\mathbb{B} \setminus \mathbb{D}$



2. Nun feststellen, was die **Hauptoperation** ist (in diesem Fall ist das die Schnittmenge, gegeben durch das Zeichen $\cap$. Gesucht wird also nach dem Bereich, wo **beide Farbcodes** anzutreffen sind. dies ist gerade der folgende Bereich:



Aufgaben zu Mengenoperationen



1. Für die Aufgabe ist gegeben:
   $\mathbb{G} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
   $\mathbb{B} = \{4, 8, 12\}$
   $\mathbb{C} = \{1, 3, 6, 9\}$
   $\mathbb{D} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
   a) Zeichne ein Venn- oder Carroll- Diagramm und trage die entsprechenden Elemente im Diagramm am richtigen Ort ein.
   b) Bestimme folgende Mengen: 1. $\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$ 2. $\mathbb{C} \cup \mathbb{D}$ 3. $\mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$ 4. $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{B} \cup \mathbb{D})$
   5. $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{D})$ 6. $(\mathbb{D} \cap \mathbb{C}) \cup (\mathbb{C} \setminus \mathbb{B})$

2. Welche Operationszeichen (aus der Auswahl ∪, ∩ und \ ) musst du einsetzen, damit eine richtige Aussage entsteht? Es gilt übrigens, dass die Grundmenge $\mathbb{G}$ nicht leer ist und die Mengen $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, und $\mathbb{D}$ Teilmengen von $\mathbb{G}$ sind.

a) $\mathbb{B} \;\square\; \overline{\mathbb{B}} = \mathbb{G}$

b) $\mathbb{B} \;\square\; \mathbb{G} = \mathbb{B}$

c) $\mathbb{G} \;\square\; \mathbb{B} = \mathbb{G}$

d) $\mathbb{G} \;\square\; \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$

e) $\mathbb{C} \;\square\; \mathbb{G} = \{\ \}$

f) $\mathbb{G} \;\square\; \mathbb{C} = \overline{\mathbb{C}}$

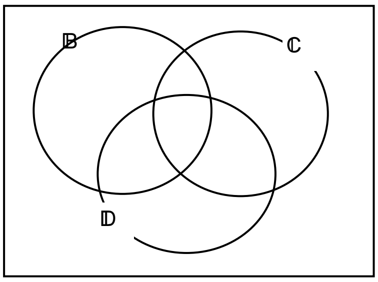
g) $(\mathbb{B} \;\square\; \mathbb{D}) \;\square\; \mathbb{C} = \mathbb{B} \;\square\; (\mathbb{D} \;\square\; \mathbb{C})$

h) $\overline{\mathbb{B} \;\square\; \mathbb{C}} = \overline{\mathbb{B}} \bigcirc \overline{\mathbb{C}}$

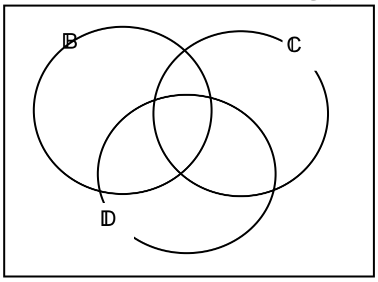
i) $\mathbb{B} \setminus \mathbb{C} = \overline{\mathbb{C}} \bigcirc \mathbb{B} \;\_\_\_\_\; (\mathbb{B} \;\square\; \mathbb{C})$

3. Schraffiere im Venndiagramm den die Gebiete, welche folgende Mengen veranschaulichen:

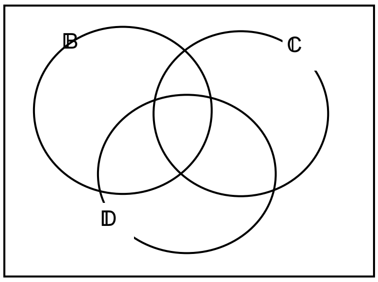
a) $(\overline{\mathbb{B}} \cap \mathbb{C}) \setminus \mathbb{D}$



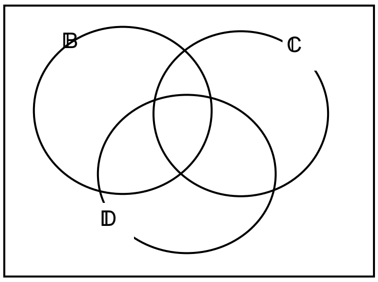
b) $(\mathbb{B} \cup \mathbb{C}) \setminus (\mathbb{D} \cap \mathbb{C})$



c) $(\mathbb{B} \cup \mathbb{C}) \setminus \overline{(\mathbb{D} \cap \mathbb{C})}$



d) $(\mathbb{B} \setminus \mathbb{C}) \setminus (\mathbb{C} \cap \overline{\mathbb{D}})$



Fragen / Dinge auf die ich achten will: *(Raum für eigenen Notizen und Fragen)*