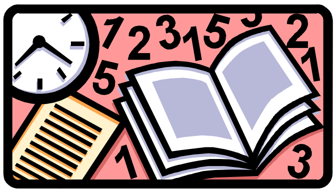
Name:



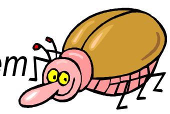
Mathematik-Dossier
Rechnen mit Zahlvariablen

Inhalt:

- **Was bringt Algebra?**
- **Bilden und Umformen von Termen in $\mathbb{Z}$**
- **Gleichungen**
- **Ungleichungen**

Verwendung:

Dieses Dossier dient der Repetition und Festigung innerhalb der obgenannten Themen. Es beinhaltet einen kurzen Theorie-Teil, sowie verschiedene Übungen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die <u>Aufgaben müssen in der Freizeit</u> (oder in der Hausaufgabenstunde) <u>gelöst werden</u>. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden.

Wichtig: Die Aufgaben erfordern ein konzentriertes Vorgehen. Es ist daher sinnvoll, mindestens während 15 Minuten am Stück daran zu arbeiten, mit Vorteil bearbeitest du ein ganzes Kapitel aufs Mal.

1. Was bringt Algebra?

1. Was ist Algebra überhaupt?

Um überhaupt verstehen zu können, welche Vorteile die Algebra gegenüber der Arithmetik hat, müssen wir zuerst einmal wissen, was Algebra überhaupt ist.

Zuerst zu den Begriffen:

- **Arithmetik** bedeutet soviel wie **„Rechnen mit Zahlen“** oder Zahlrechnen.
- **Algebra** dagegen bedeutet „**Rechnen mit Buchstaben**“ oder Buchstabenrechnen.

Die Algebra rechnet also nicht mehr nur mit Zahlen, vielmehr kommen in den Rechnungen sowohl Zahlen, wie auch Buchstaben vor.

Ein algebraischer Term heisst also zum Beispiel: 4a + 4b + (-14a)

2. Vorteile beim Rechnen mit Algebra.

- **Dank Algebra können wir Dinge in allgemeiner Weise mitteilen / kommunizieren**
- **Algebra hilft, Probleme (in allgemeiner Art) zu lösen**
- **Algebra hilft, um Begründungen und Beweise für Sachverhalte zu liefern**

Die Grundidee ist ganz einfach: Statt Zahlen stehen Variablen, die bei Bedarf wieder mit frei wählbaren Zahlen ersetzt werden können

Das heisst also, dass ich eine Berechnung (z.B. für die Entwicklung eines Preises, für die Betrachtung eines Gewinnes von einem Unternehmen) unabhängig von effektiven Zahlwerten durchführen kann. Dies bedeutet, dass ich alle Einflüsse zwar berücksichtige, aber eben als „Variable“ und nicht als „nackte Zahl“. So kann ich lange rechnen und Vereinfachen und werde erst ganz am Schluss die entsprechenden Zahlen einsetzen. Die Rechnung muss dann für alle möglichen Zahlen nur einmal gemacht werden. Am Schluss wird eingesetzt und geschaut, was **sich am Besten eignet.**

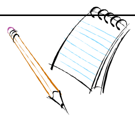
3. Beispiele für Algebra

Der Mensch strebt dazu, möglichst allgemeingültige Gesetze und Regeln aufzustellen. So haben sich die Mathematiker bemüht, ebenfalls diesen Weg einzuschlagen. Ihre Idee war es, statt Zahlen Buchstaben (=Variablen) zu verwenden, um damit anzudeuten, dass nicht „Einzelfälle“, sondern „Allefälle“ bearbeitet werden können.

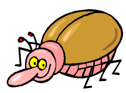
→ Algebra hilft für allgemeine Formulierungen (z.B. Zahl und Gegenzahl: x → (-x)
→ Algebra produziert allgemeingültige Aussagen (z.B. Doppeltes der Zahl: x → 2x)
→ Algebra liefert damit bessere Argumente, hilft beim Problemelösen

allgemeingültige Regel	**Beispiele mit Zahlwerten**					
(-x)	**5**	1	***(-2)***	*(-5)*	***(-12)***	*(-23)*
x	(-5)	**(-1)**	2	**5**	12	**23**

allgemeingültige Regel	**Beispiele mit Zahlwerten**					
x	**5**	(-2)	***(-3)***	2	***(-23)***	*11*
2•x	10	**(-4)**	(-6)	**4**	(-46)	**22**



Aufgaben erste Berührung mit Algebra



1. Vervollständige die Tabelle:

allgemeingültige Regel	**Beispiele mit Zahlwerten**					
x	**5**		***(-2)***		***(-12)***	
(2•x) - 2		**6**		**4**		**22**

2. Welche allgemeingültige Regel liegt diesen Zahlenbeispielen zu Grunde?:

allgemeingültige Regel	**Beispiele mit Zahlwerten**					
x	**5**	(-5)	***(-2)***	*(-3)*	***(-12)***	*(-21)*
	(-4)	**6**	3	**4**	13	**22**

2. Bilden und Umformen von Termen in $\mathbb{Z}$ – Teil 1

1. Die Bedeutung des negativen Vorzeichens einer Zahl.

Term (-x) → Setze 2 für x: → Der Term (-x) ist also hier = (-2)
Term (-x) → Setze (-2) für x: → Der Term (-x) ist also hier = (-(-2))

Wenn wir diese Zahlen also Pfeil auf der Zahlengerade deuten, dann stellen wir fest, dass das negative Vorzeichen nichts anderes bedeutet, als den Pfeil umzudrehen (also so was wie „Pfeil mach kehrt!).
Auch können wir sehen, dass die Kombination – – eigentlich ein + ergibt.

x	Pfeil mach kehrt	(-x)	Pfeil mach kehrt	(-(-x)) = (+ x) = x
2		(-2)		(-(-2))
→		←		→

Damit kann definiert werden: **2 = (- (-2) und allgemein: x = (-(-x))**

2. Die Koeffizienten (="Vorzahlen")

In algebraischen Termen finden wir vielfach Dinge wie 3x, 6y, 34xy oder ähnliches. Dahinter versteckt sich eigentlich nichts anderes als eine Multiplikation. Da diese sowieso stärker ist als eine Addition oder Subtraktion, <u>schreiben wir zwischen Zahlen und Buchstaben oder zwischen verschiedenen Buchstaben das Multiplikationseichen nicht mehr.</u>

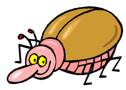
Wir wissen: 3 • 2 = 2 + 2 + 2 (Definition der Multiplikation)
somit 3 • x = x + x + x
vereinfacht 3x = x + x + x

ebenso: y = 1y = 1 • y und (-y) = (-1y) = (-1) • y

Vereinbarung: Wir schreiben 3 • x als 3x und entsprechend (-3) • x als (-3x)

WICHTIG: Koeffizienten (Vorzahlen) sind mit der Variable durch eine MULTIPLIKATION verknüpft, das Multiplikationszeichen wird einfach aus Gründen der Vereinfachung nicht geschrieben.

Aufgaben mit Koeffizienten



1. Setze für x die entsprechende Zahl in den gegebenen Term ein und rechne aus.

Bsp: *x=2* *3x =* ***3 •2 = 6***

a) x=(-2) 3x= ....

b) x=(+3) (-2x)= ....

c) x=(-23) 10x= ....

d) x=(+3) (-12x)= ....

2. Setze für x die entsprechende Zahl in den gegebenen Term ein und rechne aus.

Bsp: *x=2* *3x+15=* ***3 •2 + 15 = 6 + 15 = 21***

a) x=(-2) 2x – 18 = ...

b) x=(+3) (-6x) + 15 = ...

c) x=(-23) 10x – 23= ....

d) x=(+3) (-3x) : 3 = ...

e) x=(+3) (-3x) + 15 : 5 = ...

f) x=(+3) ((-3x) + 15) : 3 = ...

g) x=(+3) (-3x) – (-15) = ...

3. Bilden und Umformen von Termen in $\mathbb{Z}$ – Teil 2

1. Das Distributiv-Gesetz:

Wir haben bereits beim Rechnen in $\mathbb{N}_0$ das Distributiv-Gesetz (=Verteilungsgesetz) kennengelernt. Dabei haben wir gemeinsame Faktoren ausgeklammert, oder den Faktor vor der Klammer auf die Summanden in der Klammer verteilt. *(Wenn du nicht mehr so sicher bist, schau im Dossier über das Rechnen in $\mathbb{N}_0$ nach!)*

Beispiel:

$11a + 14a$	Man erkennt leicht, dass beide Summanden den Faktor a enthalten.
$= a\,(11+14)$	Ausklammern des gemeinsamen Faktors
$= a \bullet 25$	Klammer ausrechnen
$\underline{= 25a}$	Produkt ordnen (Vorzahl zuerst, dann die Buchstaben)

$3\,(x - 4)$	Hier steht der der gemeinsame Faktor VOR der Klammer.
$\underline{= 3x - 12}$	Ausmultiplizieren (denk dran, das • zwischen 3 und der Klammer wird nicht geschrieben. Wenn nichts steht, ist es also immer ein •)

2. Assoziativ- und Kommutativgesetz

Natürlich gelten – bei der Multiplikation und der Addition – weiterhin das Assoziativ- und das Kommutativgesetz.

a) Assoziativ-Gesetz : Beispiele:

$14\,(ab) = 14ab$

$(-5)x = (-5x)$

b) Kommutativ-Gesetz:

Das Kommutativgesetz brauchst du eigentlich immer, wenn du ein Produkt in die richtige Ordnung bringst. So ist $c \bullet 15 = 15c$ (Du hast die Faktoren vertauscht = Kommutativgesetz). Es ist eine wichtige Regel, dass bei Produkten von Zahlen und Buchstaben immer die Zahl vorne schreibt (darum auch Vorzahl!)

3. Reihenfolge innerhalb der Terme

Algebraische Terme müssen immer geordnet angegeben werden. Die Regel ist, dass man zuerst auf die Buchstaben schaut und diese alphabetisch ordnet. Am Schluss eines Terms stehen die Zahlterme (also die „buchstabenlosen" Terme)

Beispiel: Der Term $12s + 123a - 12 + 23d$ ist nicht korrekt geordnet. Er muss folgendermassen angegeben werden:

$123a + 23d + 12s - 12$ (also dem Alphabet nach: a – d – s – Zahlterm)

Die Variablen werden alphabetisch geordnet, die Zahlterme kommen immer am Schluss!)

4. Addieren und Subtrahieren von „gleichartigen Termen"

Die Summe $34x + 3x$ kann natürlich berechnet werden. Entweder man klammert aus: $(34 + 3)\,x = 37x$ oder man stellt sich vor, dass das „x" z.B. für Äpfel steht. Dann heisst die Rechnung nämlich 34 Äpfel + 3 Äpfel. Und dass das 37 Äpfel gibt, ist wohl für niemanden ein Geheimnis. Terme, die über genau die gleichen Variablen verfügen, kann man also zusammen „verrechnen".

Beispiel 1:

$34x + 3y - 3x$	Zuerst einmal Operatoren vertauschen
$= 34x - 3x + 3y$	Dann die gleichartigen Termen soweit vereinfachen wie möglich
$\underline{= 31x + 3y.}$	Und jetzt kann man nichts mehr machen, weder Ausklammern noch vereinfachen.

Beispiel 2:

$34x + 3xy - 3x$	Zuerst einmal Operatoren vertauschen
$= 34x - 3x + 3xy$	Dann die gleichartigen Termen soweit vereinfachen wie möglich
$\underline{= 31x + 3xy.}$	Und jetzt kann man nichts mehr machen, weder Ausklammern noch vereinfachen.

Grund: 31x und 3xy sind nicht gleichartig. Denn im einen Term kommt x vor, im anderen Term xy. Das sind zwei verschiedene Dinge (z.B. Äpfel und Apfelwähen Und die Rechung: 31 Äpfel + 3 Apfelwähen ist nicht sinnvoll zu lösen.

Tipp: Der Ausdruck b ist gleich 1• b, also 1b, der Ausdruck x ist gleich 1•x, also x. usw.

5. Klammerregeln

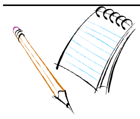
Wie bis anhin gelten die Regeln für setzen und auflösen von Klammern. Also: „Steht vor der Klammer ein Minus, darf man die Klammer nur auflösen, wenn man die Operationszeichen in der Klammer wechselt. *Genaueres findest du im Dossier „Grundoperationen in $\mathbb{N}_0$“*

also:	1. Beispiel:		7x + (3y – x)	Klammer auflösen
		=	7x + 3y – x	Ordnen (Operatorkonzept)
		=	7x – x + 3y	von links nach rechts – Gleichartiges berechnen
		=	6x + 3y	Distributiv (Ausklammern von Faktor 3)
		=	<u>**3 (2x+y)**</u>	
	Achtung, Minus vor der Klammer!)			
	2. Beispiel:		2a - (5b – a)	Klammer auflösen
		=	2a – 5b **+** a	Ordnen (Operatorkonzept)
		=	2a + a –5b	von links nach rechts – Gleichartiges berechnen
		=	<u>**3a – 5b**</u>	Ausklammern nicht möglich. Also fertig.

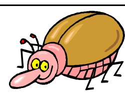
6. Summenverwandlung und Operatorkonzept

Natürlich <u>*gelten auch in der Algebra alle bisher bekannten Regeln*</u>. Ebenso verwenden wir weiterhin alle unsere Hilfsmittel, wie z.B. die Summenverwandlung und das Operatorkonzept.

(-5x) - (-4) + (-9) – 2x	Summenverwandlung
= (-5x) + 4 + (-9) + (-2x)	Operatorkonzept, damit etwas Ordnung herrscht
= (-5x)+ (-2x) + 4 + (-9)	Assoziativgesetz (zusammengehöriges berechnen)
= [(-5x) + (-2x)] + [4 + (-9)]	Klammern ausrechnen
= (-7x) + (-5)	Summenverwandlung rückgängig, für einfachstes mögliches
<u>= (-7x) – 5</u>	Resultat.



Aufgaben Addition - Termordnung



1. Vereinfache die Terme so weit wie möglich. Verwende dabei das Operatorkonzept und die Summenverwandlung. Gib die Lösung geordnet an.

a) (-12x) + 23x – 2x = ...

b) (-123y) + (-3x) + 15y= ....

c) (-34y) + 4y – (-23x) = ...

d) 43m + (-34)mn + 3mn = ...

e) 152a+ (-135b)+ (-15)a = ...

f) (-89d) + (-5e) + 90e = ...

2. Vereinfache die Terme so weit wie möglich. Löse dabei zuerst die Klammern auf, verwende das Operatorkonzept und / oder die Summenverwandlung! Gib die Lösung geordnet an.

a) (-22x) – (33y – 2x) = ...

b) (-123y) - [(-3y) + 15y]= ....

c) (-31y) – [89y – (-3x) + 4x] = ...

d) 3m + [(-41)mn + 33mn – 6m] = ...

e) [52a - (-13b)]+ [(-5)a + b] = ...

f) (-9r) -[(-5e) – [9e + r] – 4e] = ...

3. Schreibe zuerst die Rechnung auf und löse dann so weit wie möglich auf:

a) Subtrahiere von (-2x) die Summe aus 83 und 49x

b) Addiere 15 zur Differenz aus (-4x) und (-21)

c) Subtrahiere von der Summe von 192x und (-3y) die Differenz aus (-123y) und 21x

d) Subtrahiere von (-5y) die Summe aus (-11x) und (-8x). Subtrahiere zum Schluss (-8y)

e) Addiere zur Summe von (-x) und 23 die Differenz aus (-34x) und der Gegenzahl von 83

4. Bilden und Umformen von Termen in $\mathbb{Z}$ – Teil 3

1. Multiplikation und Division von Termen

Wie bei allen anderen Operationen auch gelten für die Addition und Division die gleichen Regeln wie in der Arithmetik. Die Multiplikation ist kommutativ und assoziativ, die Division nicht. Wichtig zu wissen ist Folgendes:

15x • 5y kann durchaus vereinfacht werden. Denn wenn man alles ausschreiben würde, dann steht 15•x•5•y. Da die Multiplikation kommutativ ist, ist dies gleich 15•5•x•y und somit kann man von links nach rechts rechnen. 15•5•x•y ergibt 75xy (hier schreibe ich die Multiplikationszeichen wieder nicht mehr)

Noch einmal in „Formelsprache“:

$15x \bullet 5y = 15\bullet x\bullet 5\bullet y = 15\bullet 5\bullet x\bullet y = (15\bullet 5) \bullet(x\bullet y) = 75\bullet(x\bullet y) = 75\bullet x\bullet y = \underline{75xy}.$

Die Faktoren eines Produktes können also so behandelt werden, dass alle Zahlen miteinander multipliziert werden, die Variablen können aneinandergereiht werden.

Ein Beispiel zur Division:

Hier steht ein Divisionszeichen vor der Klammer, also muss beim Auflösen der Klammer das Operationszeichens in der Klammer geändert werden.

$68vw : 34v = 68\bullet v\bullet w : (34\bullet v) = 68\bullet v\bullet w : 34 : v = 68 : 34 \bullet v : v \bullet w =(68 : 34) \bullet (v : v) \bullet w = 2\bullet 1\bullet w = 2\bullet w = \underline{2w}$

Hier gehören die 34 und das v zusammen (durch Multiplikation). Weil das durch das Weglassen des Multiplikationszeichens völlig klar wird, sind hier auch keine Klammern geschrieben, die - schreibt man alles ganz aus - natürlich stehen müssten.

Achtung: Bei der Division ist die Regel des Klammerauflösens zu beachten (siehe Beispiel 2)

Beispiele:

$15y \bullet 6x \bullet 8z = 15\bullet 6\bullet 8\bullet x\bullet y\bullet z = \underline{720xyz}$

$39x : 13x = 39\bullet x : (13\bullet x) = 39 \bullet x : 13 : x = 39:13 \bullet x : x = (39 : 13) \bullet (x : x) = 3 \bullet 1 = \underline{3}$

2. Darstellungsformen und Vereinfachen von Termen

Ausdrücke und Zahlen können auf verschiedene Weisen geschrieben werden, ohne dass sich der Wert des Terms ändert.

so ist zum Beispiel 18 = 1•18 = 2• 9 = 3•6 = 3•3•2 (verschiedene Darstellungen für die Zahl 18)

entsprechend ist 15ab = 15•a•b =3•5•a•b = a•3•b•5

und auch (-5a) •3b = (-5) •a•3•b = (-1) •5•a•3•b = 3a•5•(-1) = (-15)ab
und ebenso 2a•(-3a) = a•a•(-6) = $(-6)a^2$

Beim Vereinfachen von Produkten ist es also einerseits wichtig, welche Zahlen beteiligt sind, andererseits muss auch eine Entscheidung gefällt werden, welches Vorzeichen dem Ergebnis zugeordnet wird. Die Faustregel hat sich ebenfalls nicht verändert:
Bei einer geraden Anzahl negativer Faktoren wird das Produkt positiv. Bei einer ungeraden Anzahl negativer Faktoren wird das Produkt negativ.

Spezielle Vereinfachungen: x + x = 2x; x - x = 0 $x \cdot x = x^2$ x : x = 1

3. Die Verbindung von Operationen verschiedener Stufe

Die Gesetze und Vereinbarungen und Regeln gelten wie bis anhin.:

Von links nach rechts rechnen
aber 1. Klammern zuerst
2. höhere Stufe zuerst..

z.B. 2a + 3a • 5b = 2a + 15ab = a (2 + 15 b) = <u>a (15b + 2)</u>

„Punkt vor Strich“

und 2 (3b + 4) = 2• 3b + 2• 4 = <u>6b + 8</u>

„Distributiv“
(Ausmultiplizieren)

TIPP: Das Ausklammern gemeinsamer Faktoren ist sehr oft möglich!

5x - x•2p+2px
= 5x – 2px +2px

Lösen mit Ausklammern

=x (5-2p+2p)
=x (5+(-2p)+2p)
=x • 5
<u>=5x</u>

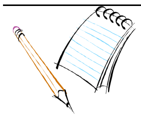
Lösen mit Summenverwandlung und Assoziativgesetz

= 5x + (-2px) + 2px
= 5x+ [(-2px) + 2px]
= 5x + 0
<u>= 5x</u>

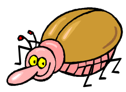
4. Und noch einmal die Regeln des Distributivgesetzes zur Erinnerung

25 – 3 (x+5) = 25 – 3x – 15 = <u>(-3x) + 10</u> (Ausmultiplizieren / Ausklammern)

(3x-6y) : (-3) = 3x : (-3) – 6y : (-3) (Ausdividieren / Ausklammern)
= (-x) – (-2y)
<u>=(-x) + 2y</u>



Aufgaben Distributivgesetz – Multiplikation – Division – Verbindung von Operationen verschiedener Stufe



1. Vereinfache folgende Terme

a) $15a : 5$

b) $7x \bullet 3$

c) $8x \bullet 3y$

d) $84xy : 7y$

e) $12x \bullet 3x$

f) $12x \bullet 4xy$

g) $21x^2y : 3xy$

2. Klammere einen möglichst grossen Faktor aus:

a) $78 - 143g$

b) $72rstu + 48tu$

c) $27x^2 - 54x$

d) $mnpr + mopqr$

e) $58afg - 29f^2$

f) $wxyz - yz$

g) $34mn - 51n$

3. Multipliziere (rsp. dividiere) aus:

a) $(63v - 1) \bullet 4w$

b) $(72v - 1) \bullet 3w$

c) $(42b - 70a) : (-14)$

d) $(a^2b – ab^2) : (ab)$

e) $(ef - fg) : (-f)$

f) $4x\,(28 - 32x)$

4. Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich:

a) $28 - (32x - 4x)$

b) $(-9ab) - (-11abc) - (27ab)$

c) $8x - (-15y) - (-13x) + 12y \bullet 3y$

d) $34h : 34 – 33h$

e) $4x - (28 + 42x)$

f) $5a\,(28 - 32a)$

g) $(-11) \bullet (xy - 27)$

h) $(-109)\,(de) - (-17)\,(ed)$

i) $68x : 17$

j) $48 - 4(5a + 6)$

k) $68d : 68 - 67$

l) $(54 - x) - 9x$

m) $35cd - 7c \cdot 4d - 16cd$

n) $19ef \cdot (4d - ef) - 19e^2f^2$

o) $(-ds) \cdot (-ds)$

p) $(-7ab) \cdot (-8) + (-63abc) : (-7c)$

q) $(-11f) - 15\,(6f - 7)$

r) $72x : 8 \cdot x$

s) $(-7x) \cdot 13y^2 \cdot (-2z)$

t) $13a \cdot 5b - (17b \cdot 8a)$

5. Schreibe zuerst die Rechnung auf und löse dann so weit wie möglich auf:

a) Dividiere die Summe von (-36ab) und 12b durch (-12) und multipliziere mit 3.

b) Multipliziere die Summe von (-23ab) und (-46cd) mit 3c

c) Dividiere die Differenz von 36ab und 12b durch (-12) und multipliziere mit c.

d) Subtrahiere von der Summe von (-32a) und 21b die Differenz der beiden Terme.

Bemerkungen / Notizen:

5. Gleichungen

1. Verständnis von Gleichungen

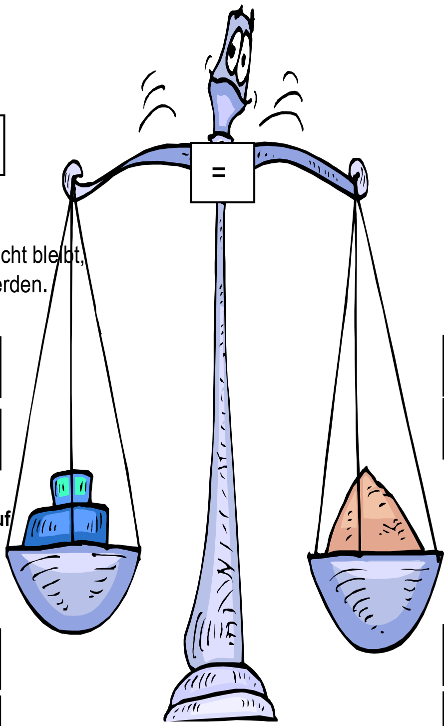
Gleichungen sind eine Art mathematisches Rätsel. Sie stellen eigentlich nichts anderes dar, als eine Waage, die auf der linken Seite und auf der rechten Seite mit verschiedenen Dingen beladen ist. Eines dieser Dinge ist die Unbekannte (z.B. x). Die Waage ist schön im Gleichgewicht (beide Seiten sind gleich schwer ➔ Gleichung).

Es geht nun darum herauszufinden, welche Zahlen für die Unbekannte (Variable) eingesetzt werden können, damit die Gleichung stimmt (also die Waage ausgeglichen steht). **Du suchst einen Zahlwert für x, welcher die rechte und die linke Seite der Gleichung gleichwertig macht, oder – anders ausgedrückt – du fragst dich, wie gross die Unbekannte x ist, damit die Waage so schön im Gleichgewicht steht.**

Dazu musst du meistens „umbeigen“, also die Variabelterme auf eine Seite bringen und die Zahlterme auf die andere Seite. Bei all diesen Umstellungen ist es aber wichtig, dass du immer auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Operation durchführst, da sonst die Waage aus dem Gleichgewicht gerät (oder eben die Terme nicht mehr gleichwertig sind).

Anders gesagt: Wenn du auf der linken Seite zusätzliche Wägestücke dazulegst, musst du das auch auf der rechten Seite tun, wenn du links etwas wegnimmst, musst du das rechts auch tun.

Die Gleichung als Waage:

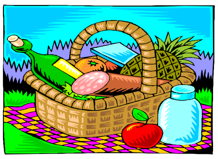


3x + 7	57 – 7x
damit die Waage im Gleichgewicht bleibt, müssen auch hier 7x addiert werden.	Wir wollen die x auf die andere Seite schaffen, ***also müssen wir hier 7x addieren, um die -7x auszugleichen.***
3x + 7 **+ 7x**	57 – 7x **+ 7x**
10x + 7	57
jetzt stören die +7 auf dieser Seite, wir schaffen sie weg, **in dem wir auf dieser Seite 7 subtrahieren.**	**das müssen wir auf dieser Seite auch tun.**
10x + 7 **- 7**	57 **-7**
10x	50
Statt 10x wollen wir natürlich nur 1 x, **also dividieren wir links durch 10**	**das müssen wir auf dieser Seite auch tun.**
10x **: 10**	50**:10**
x	5

Wir finden heraus, dass x = 5 ist, also die Zahl 5 als einzige Zahl die Gleichung erfüllt.
Das dies stimmt können wir testen, in dem wir sie einsetzen.
3 • **5** + 7 = 57 - 7• **5,** also 15 + 7 = 57 – 35 oder besser gesagt 22 = 22.

2. Die Äquivalenzumformungen bei Gleichungen.

Die Umformungen basieren auf einem einfachen Prinzip: Du wählst immer die GEGENOPERATION von dem Operator, den du auf die andere Seite schaffen willst. Versuchen wir, uns dies etwas besser vorzustellen:



Du kennst das Gewicht dieses Picknickkorbes, es beträgt 10 Kilogramm. Du selber hast den Korb gepackt, es hat 1 Flasche Obstsaft (1kg), 2 Würste (je 0.3kg), 3 Ananas (je 0.5kg), 4 belegte Brote (je 0.2kg), 1 Monstererdbeere und ein Mödeli Butter (0.25kg) drin. Der Korb selber hat ein Gewicht von 1kg.

Wenn du dies als Gleichung schreiben würdest, so bekommst du:

1 Flasche Obstsaft + 2 Würste + 3 Ananas + 4 belegte Brote + 1 Monstererdbeere + 1 Mödeli Butter + Korb = 10 kg.

Du möchtest nun wissen, wie schwer die feine, saftige Monstererdbeere ist.

Jetzt kannst du alles auf die Waage stellen. Links ist der gefüllte Korb, rechts ein 10kg Gewichtsstein.

Die Gleichung sieht also so aus:

Jetzt wird umgestellt, denn du möchtest auf der linken Seite nur noch die Monstererdbeere. Also nimmst du alles, ausser der Erdbeere von der linken Seite weg. Natürlich musst du dann auf der rechten Seite das Gewicht dieses Gegenstandes wegzählen, denn sonst steht deine Waage schief.

Übersetzen wir zuerst die Gleichung

1 Flasche Obstsaft + 2 Würste + 3 Ananas + 4 belegte Brote + 1 Monstererdbeere + 1 Mödeli Butter + Korb = 10 kg.

1• 1 kg + 2 • 0.3 kg + 3 • 0.5 kg + 4 • 0.2 kg + Monstererdbeere + 1 • 0.25 kg + 1 • 1 kg = 10 kg

Vereinfacht 1 + 0.6 + 1.5 + 0.8 + Monstererdbeere + 0.25 + 1 = 10

Vereinfacht: 5.15 + Monstererdbeere = 10

Du musst sämtliche Gegenstände, also die Flasche Obstsaft , die 2 Würste, die 4 belegten Brote, die Butter und den Korb von der Waage nehmen.

Also:

1 Flasche Obstsaft + 2 Würste + 3 Ananas + 4 belegte Brote + 1 Monstererdbeere + 1 Mödeli Butter + Korb = 10 kg.

Obstsaft wegnehmen

2 Würste + 3 Ananas + 4 belegte Brote + 1 Monstererdbeere + 1 Mödeli Butter + Korb = 10 kg **– Gewicht Obstsaft**

Würste wegnehmen

3 Ananas + 4 belegte Brote + 1 Monstererdbeere + 1 Mödeli Butter + Korb = 10 kg –Gewicht Obstsaft **– Gewicht Würste**

Ananas wegnehmen

4 belegte Brote + 1 Monstererdbeere + 1 Mödeli Butter + Korb = 10 kg – Gewicht Obstsaft – Gewicht Würste **– Gewicht Ananas**

Brote wegnehmen

1 Monstererdbeere + 1 Mödeli Butter + Korb = 10 kg – Gewicht Obstsaft – Gewicht Würste – Gewicht Ananas **– Gewicht belegte Brote**

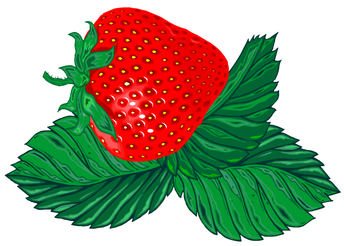
Butter wegnehmen

1 Monstererdbeere + Korb = 10 kg – Gewicht Obstsaft – Gewicht Würste – Gewicht Ananas – Gewicht belegte Brote **– Gewicht Butter**

Korb wegnehmen

1 Monstererdbeere = 10 kg – Gewicht Obstsaft – Gewicht Würste – Gewicht Ananas – Gewicht belegte Brote – Gewicht Butter **– Gewicht Korb.**

Oder in Zahlen: Monstererdbeere = 10kg – 1 kg – 0.6kg – 1.5 kg – 0.8kg – 0.25 kg – 1 kg
Monstererdbeere = 10kg – 5.15 kg
Monstererdbeere = 4.85 kg.



Die Äquivalenzumformung beschreibt hier, was du aus dem Korb nimmst (also subtrahierst). Dies kannst du aber nur darum machen, weil es vorher in den Korb gelegt (also addiert) wurde.

3. **Allgemeines Lösungsschema für Gleichungen**

Das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen folgt streng einem Schema, das je nach Lernstand ausgebaut wird. Für den Anfang verwenden wir ein Schema mit genau 3 Schritten.

Das allgemeine Lösungsschema musst du also unbedingt einhalten:

<u>Allgemeines Lösungsschema:</u>

1. Termvereinfachungen
2. Isolieren der Lösungsvariable durch Äquivalenzumformungen.
3. Lösungsmenge angeben

Erklärungen:

Im **ersten Schritt** versuchen wir, auf beiden Seiten jeweils etwas **Ordnung** zu **machen**. Wir vereinfachen den Term links und auch den Term rechts des Gleichheitszeichens möglichst weit.

Im **zweiten Schritt** dann versuchen wir, alle **Lösungsvariablen auf eine Seite der Gleichung** zu schaffen. Dazu brauchen wir die oben schon erwähnten Äquivalenzumformungen. Hier geht es also darum, die Unbekannte zu isolieren (so wie im Beispiel oben die Monstererdbeere isoliert wurde, also am Schluss ganz allein auf der linken Waagschale platziert wurde.)

➔ **Beachte: „Störende" Operatoren werden immer durch die Gegenoperation weggeschafft. Diese Operation muss aber auf beiden Seiten durchgeführt werden.**

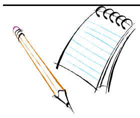
➔ **Beim Auflösen musst du erst im letzten Schritt dividieren (teilen), und zwar durch die Zahl, die vor dem x steht (Koeffizient von x = Vorzahl)**

➔ **Am rechten Rand der Gleichung schreiben wir die Umformung hin, die gemacht wurde. Damit man sehen kann, dass dies auf beiden Seiten geschieht, machen wir zwei senkrechte Striche davor. ||**

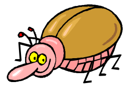
Im **dritten und letzten Schritt** geben wir schliesslich die **Lösungsmenge** an. Dies ist also so etwas wie ein Behälter, in dem alle möglichen Lösungen dieser Gleichung liegen, die wir dann einzeln herausnehmen und auf die Waagschale legen können. Darum ist die Lösung eine Menge und muss auch so angegeben werden.

Beispiele:

14	=	38 + 4x	|| keine Vereinfachung möglich	*Schritt 1 (hier nicht nötig)*
14	=	38 + 4x	|| - 38, weil dies die Gegenoperation von +38 ist.	*Schritt 2 (Isolieren von x)*
14 – 38	=	4x	|| V	*(Vereinfachen)*
(-24)	=	4x	|| : 4, weil Gegenoperation von • 4	*(dividieren)*
(-6)	=	x	|| **<u>$\mathbb{L}$ = { (-6)}</u>**	*Schritt 3: $\mathbb{L}$ angeben*
4 (x + 1)	=	6 (x – 1)	|| v	*Schritt 1 (Vereinfachen)*
4x + 4	=	6x – 6	|| - 4, weil dies die Gegenoperation von + 4 ist.	*Schritt 2 (Isolieren von x)*
4x	=	6x – 6 – 4	|| v	*(Summenverwandlung)*
4x	=	6x + (– 6) + (– 4)	|| v	*(vereinfachen)*
4x	=	6x + (– 10)	|| - 6x, weil dies die Gegenoperation von + 6x ist.	*(x auf eine Seite!)*
4x – 6x	=	(-10)	|| v	*(vereinfachen)*
(-2x)	=	(-10)	|| : (-2), weil Gegenoperation von• (-2)	*(dividieren)*
x	=	5	|| **<u>$\mathbb{L}$ = { 5 }</u>**	*Schritt 3: $\mathbb{L}$ angeben*



Aufgaben Gleichungen



1. Löse die folgenden Gleichungen auf und bestimme die Lösungsmenge

a) $x + 12 = (-32)$

b) $232 - x = (-23)$

c) $x + (-32) = (-15) + 18x$

d) $19 + (-7x) = (-5x) - (-5)$

e) $(-x) - [(-x) - (-9)] = (-3x) - [(-9x) + 33]$

f) $(-x) - [(-5x) - (-5)] = (-9x) - [(-2x) + (-72)]$

g) $(-5x) - (-6)\,[(-2x) - (-10)] = (-110)$

h) $(-6) - (-3)\,[\,(-8) + (-2x)\,] = (-132)$

i) $(-10x) - (-8)\,[\,(-7x) - (-9)\,] = (-192)$

j) $(-2x) - (-1)[(-9x) + (-8)] = (-260) + 3x$

Und darauf will ich achten:

6. Ungleichungen

1. Verständnis von Ungleichungen

Ungleichungen sind im Prinzip gleich zu behandeln wie Gleichungen. Die Ausnahme ist die, dass die Lösung, also die gesuchte unbekannte Zahl nicht nur eine Zahl ist, sondern unendlich viele Lösungen in Frage kommen. Dies natürlich darum, weil die Waage ja nicht im Gleichgewicht, sondern einfach auf einer vorgegebene Seite schwerer sein muss.

Dies bedeutet, dass wir uns beim Angeben der Lösungsmenge etwas einfallen lassen müssen, schliesslich wollen wir ja nicht unendlich viele Zahlen aufschreiben.

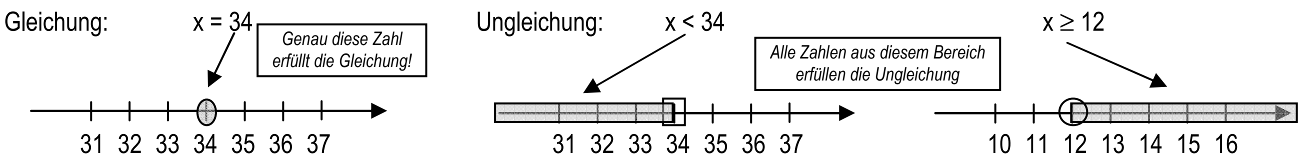
Genau wie bei den Punktmengen in der Geometrie hat bei den Ungleichungen die Grenze (also das „gleich“) eine besondere Funktion, denn wir bewegen uns eigentlich bis zum Schluss an der Grenze (behandeln die Ungleichung also genau wie eine Gleichung). Erst für die Angabe der Lösungsmenge müssen wir uns überlegen, welcher Bereich der Zahlengerade als Lösung in Frage kommt.

Wir können also Feststellen:

Die Lösungen einer Gleichung sind auf dem Zahlenstrahl als Punkt dargestellt.

Die Lösungen einer Ungleichung sind dagegen ein Strahl, dessen Endpunkt entweder dazugehört, oder nicht.

Beispiele:



2. Lösungsschema für Ungleichungen

Das allgemeine Lösungsschema ist identisch mit dem der Gleichungen:

<u>Allgemeines Lösungsschema:</u>
1. Termvereinfachungen
2. Isolieren der Lösungsvariable durch Äquivalenzumformungen.
3. Lösungsmenge angeben

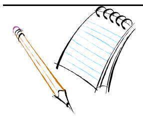
Beispiele:

14	<	38 + 4x	|| keine Vereinfachung möglich	*Schritt 1 (hier nicht nötig)*
14	<	38 + 4x	|| - 38, weil dies die Gegenoperation von +38 ist.	*Schritt 2 (Isolieren von x)*
14 – 38	<	4x	|| V	*(Vereinfachen)*
(-24)	<	4x	|| : 4, weil Gegenoperation von • 4	*(dividieren)*
(-6)	<	x	|| **<u>𝕃 = { x∈ Z / x > (-6)}</u>**	*Schritt 3: 𝕃 angeben*

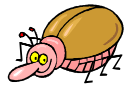
Die **Lösungsmenge** wird bei Ungleichungen nicht in der aufzählenden Form angegeben, denn da müsste man alle möglichen Lösungen aufschreiben, das übersteigt unsere Möglichkeiten. Stattdessen verwenden wir die **beschreibende Form** der Mengendarstellung.

𝕃 =	**{ x∈ Z**	**/**	**x > (-6)}**
↑	↑	↑	↑
Lösung sind	alle x aus der Menge Z,	für die gilt:	x ist kleiner als (-6)

Vorsicht: Vermeide das Dividieren durch eine negative Zahl!



Aufgaben Ungleichungen



1. Löse die folgenden Ungleichungen auf und bestimme die Lösungsmenge:

a) $(-23) < x + (-2)$

b) $x - (-7) > 24$

c) $(-6x) - (-34) \leq (-8) - (-8x)$

d) $(-7x) - [\,(-5) + (-6x)\,] < (-3x) - [\,(-29) + (-3x)\,]$

e) $26 < (-7) - [(-3) + (-5x)]$

f) $(-7) \geq (-5) - (-5x) - [(-6) - (-9x)]$

g) $(-5x) - (-6)[(-3) - (-4x)] \leq (-75)$

h) $1188 \leq (-9)[\,(-7x) + (-6)\,]$

i) $(-5x) - (-10)[(-9x) - (-9)] \leq (-1525)$

j) $(-6) - (-5)[(-7x) - (-9)] < 249$

Und darauf will ich achten: